

國立臺東大學教育學系所
課程與教學碩士班研究論文

指導教授：熊 同 鑫 博士

國小六年級學童分數運算之概念研究



研究生：陸雅林 撰

中華民國九十六年七月

國立台東大學
學位論文考試委員審定書

系所別：教育學系(所)課程與教學碩士專班

本班 陸雅林 君

所提之論文 國小六年級學童分數運算之概念研究

業經本委員會通過合於

☒ 碩士學位論文
☐ 博士學位論文

條件

論文學位考試委員會：

鍾

靜

(學位考試委員會主席)

易

英

陽

熊

同

金

(指導教授)

論文學位考試日期：96年6月25日

國立台東大學

附註：1.一式二份經學位考試委員會簽後，送交系所辦公室及註冊組或進修部存查。

2.本表為日夜學制通用，請依個人學制分送教務處或進修部辦理。

博碩士論文授權書

本授權書所授權之論文為本人在 國立台東大學 教育研究 系(所) 課程與教學 組 九十五 學年度第 二 學期取得 碩 士學位之論文。
論文名稱：國小六年級學童分數運算之概念研究

本人具有著作財產權之論文全文資料，授予下列單位：

同意	不同意	單 位
☒	☐	國家圖書館
☒	☐	本人畢業學校圖書館

得不限地域、時間與次數以微縮、光碟或其他各種數位化方式重製後散布發行或上載網站，藉由網路傳輸，提供讀者基於個人非營利性質之線上檢索、閱覽、下載或列印。

本論文為本人向經濟部智慧財產局申請專利(未申請者本條款請不予理會)的附件之一，申請文號為：_____，請將全文資料延後半年再公開。

公開時程

立即公開	一年後公開	二年後公開	三年後公開
☒	☐	☐	☐

上述授權內容均無須訂立讓與及授權契約書。依本授權之發行權為非專屬性發行權利。依本授權所為之收錄、重製、發行及學術研發利用均為無償。上述同意與不同意之欄位若未鉤選，本人同意視同授權。

指導教授姓名：熊 同 鑫 (親筆簽名)

研究生簽名：陸 雅 林 (親筆正楷)

學 號：1793038 (務必填寫)

日 期：中華民國 九十六 年 七 月 十六 日

1. 本授權書 (得自 <http://www.lib.nttu.edu.tw/theses/> 下載) 請以黑筆撰寫並影印裝訂於書名頁之次頁。
2. 依據 91 學年度第一學期一次教務會議決議: 研究生畢業論文「至少需授權學校圖書館數位化，並至遲於三年後上載網路供各界使用及校內瀏覽。」

謝 誌

求學的三年時光已悄悄流逝，這三年的日子裡我從對研究一知半解，到現在對於研究有了基礎的認識，這些都需歸功於所內老師們諄諄教導，以及班上同學們的提攜，讓我有這個機會及緣份得以在教學生涯中更上層樓，也藉此提昇自己的專業知識。經過這一年來的研究歷程，讓我對於評量問題的觀察力提昇不少，有助於我日後在教學工作上的精進及成長。

人生旅途因為有貴人提攜而顯得燦爛耀眼，因著緣份及榮幸，我得以接受恩師熊同鑫教授的指導，讓我在論文寫作歷程中獲益良多，每當論文寫作遭遇瓶頸時，熊教授總是能及時給予協助，化解困難。在熊教授的論文指導過程中，個人深刻體會到恩師對做研究的投入及執著，不但使我對研究有了更深入的瞭解，其豐富的學識使我能以更多元、周延的角度進行研究，對於往後我的教學研究上有莫大的幫助。此外，也要感謝張英傑教授，在我的論文研究計畫及口試時，對我懇切的指導，讓我在文獻整理及研究方法的運用上釐清了許多觀念，並且提醒我在研究的過程中所疏忽的事項，讓我的論文得以更臻完備。同時也要感謝鍾靜教授給我的建議，激發我許多的靈感，讓我能更深入去瞭解我的研究問題，在二階段式診斷評量的運用上有更深一層的認識，並且在鍾教授的言談中也體會到學者樂觀積極的治學態度。

特別感謝國立臺南教育大學謝堅教授在評量試題中專業的指導，以及東海國小同事們的協助，尤其數學領域輔導團員順利校長、琇瑩校長、振興主任、玉英老師、靖雯老師及安妮老師們，花了許多時間和我討論研究內容及試題分析，並給我許多寶貴的意見，讓我在研究的過程中，能夠深入瞭解自己研究的優缺點，以減少自己過於主觀的想法。感謝研究期間和我一起成長、一同學習的學伴瑾瑜和莒瑋，由於妳們不時給我的鼓勵，使我在陷入困頓時還能以喜樂的心來面對，因而化解了不少難題。此外，更謝謝所有協助及接受評量施測的六年級師生。

最後，要謝謝親愛的爸爸、媽媽及公公、婆婆各方面的協助。研究期間，我與老公正一彼此關懷、相互鼓勵，在您愛的支持下，讓我無後顧之憂的從事論文寫作；還有那對寶貝--晴萱、晴佑，因為你們的配合媽媽得以完成論文的考驗。僅以此論文，獻給所有支持我、關心我的師長、同事、親友與家人。

雅林 謹誌

中華民國九十六年七月

國小六年級學童分數運算之概念研究

陸雅林

國立台東大學教育學系所

摘 要

本研究採研究者自編國小分數運算二階段式診斷評量工具，調查台東縣 200 名國小六年級學童分數運算概念學習的表現，並探討在分數運算錯誤迷思概念的類型及分數運算概念之連貫性。

研究結果顯示，國小六年級學童在分數運算概念中有以下錯誤迷思概念類型：部分、全體分割關係及等分概念的錯誤類型；單位量概念的錯誤類型；等值分數、帶分數及假分數概念的錯誤類型；未能理解語句之間的關係及意義；分數加減法運算法則錯誤；分數乘法中數概念過度類化、運算法則錯誤。學童在分數運算概念之連貫性出現下列關鍵點：分數等分割概念；分數加減法；假分數、等值分數、帶分數；分數乘法；分數除法。學童在分數運算的錯誤類型之原因有概念的過度類化、分數概念不清以致學生自行建構一些認為是對的概念同時也導致運算法則錯誤、未能理解語句之間的關係及意義造成題意誤解。針對以上研究結果，提出教師教學與評量的建議。

關鍵字：分數、錯誤迷思概念、二段式診斷評量

Utilizing a Two-Tier Test to Identify Sixth Grade Students' Conceptions of Fraction Calculation

Lu, Ya-Lin

Department of Education , Nation Taitung University

Abstract

The purpose of this study is to investigate elementary students' conceptions of fraction calculation. Based on 1 to 9 mathematical curriculum guidelines and theory of 2-tier test, researcher developed a paper-and-pencil instrument to reach research purpose. A total of 200 Grade 6 students of Taitung County were invited and administered the instrument.

Results of this study showed types of misconceptions in fraction calculation were: (a) error types of partial or whole separate relationship and equivalent fraction concept, (b) the error type of unit measurement concept, (c) the concepts of equivalent fraction, mixed fraction and improper fraction, (d) the lack of understanding the relationship and meaning between sentences, (e) error in fraction calculation (Addition and subtraction method), (f) over-generalization in fraction calculation (multiplication and division method), and (g) error in the rule of calculation.

The key points of students' sequential conceptions of fraction calculation are: (a) the equal division concept of fraction, (b) fraction addition and subtraction method, (c) fraction multiplication and division method, (d) improper fraction, equivalent fraction, mixed fraction; fraction multiplication, and (e) fraction division. The reasons of error occurring in the fraction calculation among the students were: over-generalization in concepts, the lack of understanding the concept of fraction; all of these errors lead to the result that students develop their own concept and calculation methods, they don't know the relations and meaning between sentences, and often get misinterpretation. According to the results of this study, suggestions of teaching and assessing are addressed.

Keywords: Fraction, misconception, 2-tier test.

第一章 緒論

本章陳述研究之背景動機、目的與待答問題，並針對研究的重要名詞與研究限制說明之。全章共分成四節：第一節為研究背景動機；第二節為研究目的與待答問題；第三節為重要名詞釋義；第四節為研究範圍；第五節為研究限制。

第一節 研究背景動機

分數 (fraction) 是國民小學數學課程中不可忽視的一個環節，因為分數具有多重的意義與分割概念，屬於既複雜又重要的概念，學生在學習分數時常遭遇許多困難，也是多數國小學童的夢靨，而部分的國小教師也視之為畏途。學童在分數的運算的概念不清表現，往往成為數學學習問題的一大來源。

「培養學童主動思考數學問題，甚至願意用數學的語言與人溝通、表達自己的想法。」一直以來是個人希望在數學課室內營造的情境，然而在大班級教學時，總是被班上固定幾位善於發言的孩子佔據了大部分的時間，儘管如此研究者卻發現，其餘的孩子事實上是有人在思考的，但並沒有來得及表達自己的想法。只是，從研究者的教學經驗也發現，許多孩子的想法是零碎的、片段的，甚至需要去組織、並系統化之引導出來。數學評量的另類思考，是以多元的觀點，來論述評量的工具與功能。主張評量不但要檢驗學生的能力，也要診斷學生學習的方法。因此評量也是協助學生能力發展的一種工具（黃敏晃、林文生與鄔瑞香，2001，頁231）。在概念的學習過程，學生經常會產生一些錯誤，若教師對於學生的錯誤概念無法立即診斷並加以補救，將會影響往後其他概念的學習。透過錯誤類型分析，教師可以發現學生學習困難之處，了解學生犯錯的原因，同時所得到診斷資料可作為設計補救教學時的依據，並針對學生的問題做有效的矯治。

傳統的數學教學經常強調公式算則的背誦和紙筆反覆演算，以期在最短的時間內解出精確的答案，這在應付學力測驗和聯考成效上似乎不錯，但機械式的演

算常會阻礙學生學習的發展，並使學生逐漸喪失解題過程答案合理性的監控能力。傳統的評量較無法了解學生學習上易犯的錯誤與困難，教師較難透過傳統的評量來收集學生的錯誤概念類型與錯誤原因。研究者曾在 2004 年暑假參加國立教育研究院籌備處針對全國數學領域深耕種子教師舉辦的第 1390 期數學研習，根據研習中學習得知 Treagust(1989)提出二階段式診斷評量工具，對學生的錯誤概念之測量具有經濟、快速、便捷的好處。柳賢(2001)指出二階段式診斷評量能診斷出學生錯誤概念，幫助教師對學生學習情況能更進一步的深層了解其內涵。

傳統的班級教學中，教師在完成階段性的教學後，會利用成就評量來驗收學生的學習成效，學生為了回應教師的期待，得到較高的分數，對分數的學習可能流於對定義、定理做機械性的記憶操作及計算，難以建構完整的程序性知識(procedure knowledge)，更無法發展出數學的概念性知識(conceptual knowledge)，讓學生減少錯誤概念的產生，對課程內容做有意義的學習而非囫圇吞棗，是研究者在教學過程中發現值得研究的課題。

基於以上所言，本研究採用二階段式診斷評量，探討國小學童在數學領域分數運算學習內容有哪些錯誤概念類型？國小學童在數學領域分數運算學習內容錯誤概念形成之影響關鍵為何？研究結果期能作為教師教學參考，並提供相關評量策略及設計的依據。

第二節 研究目的與待答問題

壹、研究目的

研究者基於上述研究動機，提出以下的研究目的：

- 一、以九年一貫課程數學領域綱要為依據，探討國小六年級學童分數運算概念之表現。
- 二、探討國小六年級學童在分數運算學習內容之錯誤概念的類型。
- 三、綜合前兩項，發展國小數學二階段式分數運算診斷評量工具，以利教師判定學生之概念類型，作為教材準備依據，進行有效教學。

貳、待答問題

根據研究目的，研究者列出待答問題如下：

- 一、國小六年級學童在分數運算概念之表現為何？
- 二、國小六年級學童在數學領域分數運算學習內容有哪些錯誤概念類型？
- 三、國小數學二階段式分數運算診斷評量工具，用於診斷國小分數運算之情形為何？

第三節 重要名詞界定

壹、分數

教育部國立編譯館依據 82 年課程標準所編的國小數學科教學指引有如下的說明：當使用分數數詞（字）來描述有理數時（以 $\frac{3}{5}$ 為例），至少可以從下列六種角度，來討論分數數詞（字）的意義：（一）部分與全體的比較：全體為 5 時，3 是 5 的部份；（二）除法的活動：3 除以 5 活動的另一種記法；（三）等分割：對於物件 1，進行一個運作，將 1 等分割成 5 份，再取出其中的 3 份；（四）小數的另一種記法；（五）比的意義：表示兩數量的相對關係（3:5），（六）測量：用來測量一個不滿一個單位量的量的數值問題，或是對兩量的對等關係進行數值化（比值）（國譯編譯館，2000）。

貳、錯誤、迷思概念

迷思概念產生，可能源自於學生日常生活經驗的自我學習所得；也可能來自於學生對老師機械式教學的一知半解（呂溪木，1985）。Maurer（1987）也指出在數學學習中，若存有迷思概念，則在演算時，將會產生有系統的錯誤演算規則，此種錯誤的演算規則並非由於學生粗心大意的結果，而是因為不瞭解才產生的。

從概念的發展、聯結與分析，導出學習者所具有的最初想法，從而明瞭與發現學習者所具有的錯誤迷思概念。因此，錯誤迷思概念的診斷與釐清有助於教學的進行，經過概念改變的教學或引導，才能使教學與學習成為有效的活動。就數學知識本身而言，學習新的知識又以舊有的知識經驗作為基礎，依靠學生認知結構進行同化，這過程就是知識的正遷移；相反的，這過程產生的消極作用就是知識的負遷移。當學習的概念混淆不清時，負遷移對數學學習的干擾就可能表現在定理、公式、法則的誤用，及範例的應用錯誤等等情形（邱明星，2006）。

參、二階段式診斷評量

爲使一些科學學科迷思概念的研究獲得更多結果，及能更有效、實際地應用於教學現場上，有些學者提倡發展二階段式(two-tier)概念診斷測驗之必要性(Odom & Barrow, 1995; Treagust, 1997)。所謂的二階段式診斷評量方式共分爲二層次，其中第一層次是核心概念的內容，第二層次則爲解釋回答第一層次之原因。

在一個含有四個選項的典型選擇題測驗中，猜對答案的機率是 2.5%；但在二階段的選擇題中，如果第一階段含有兩個選項，第二階段含四個選項，兩階段能作正確連結而猜對者，其機率只有 12.5%。換句話說，如果第一階段含有四個選項，第二階段也含四個選項，兩階段能作正確而猜對者，其機率只有 6.25%，可見在兩階段的評量工具可以減低猜題猜對之機率，相對的也提高題目評量的效果。本研究所指的二階段診斷評量爲診斷性測驗，測驗方式分爲二階段；第一階段共有四個答案選項；第二階段至少有四個以上的理由選項，主要了解學生所選擇的答案及理由敘述是否爲正確概念。其測驗題型式如下：

題目：一條繩子長 100 公尺， $\frac{4}{5}$ 條繩子和 $\frac{4}{10}$ 條繩子接起來和幾條繩子一樣長？

答案選項：() ① $\frac{8}{10}$ 條 ② $\frac{8}{15}$ 條 ③ $\frac{12}{10}$ 條 ④ 1 條

} 第一階段

理由選項：() 【A】 $\frac{4}{5} + \frac{4}{10} = \frac{4+4}{5+10} = \frac{8}{15}$ 條。

【B】 $\frac{4}{5} + \frac{4}{10} = 8 + 4 = \frac{12}{10}$ 條。

【C】 $\frac{4}{5} + \frac{4}{10} = \frac{8}{10} + \frac{2}{5} = \frac{10}{10} = 1$ 條。

【D】 $\frac{4}{5} + \frac{4}{10} = \frac{4+4}{10} = \frac{8}{10}$ 條。

【E】 $\frac{4}{5}$ 條繩子和 $\frac{4}{10}$ 條繩子合起來就是 1 條繩子。

【F】 $\frac{4}{5} + \frac{4}{10} = \frac{8}{10} + \frac{4}{10} = \frac{12}{10}$ 條。

} 第二階段

圖 1-1-1 二階段評量診斷工具格式

第四節 研究範圍

本研究係依照研究對象，所使用之數學領域課程教材版本，及教育部 2003 年 11 月 14 日台國字第 0920167129 號，頒布之國民中小學九年一貫數學領域課程綱要為研究理論架構，作為國小學童「分數運算」診斷測驗工具編製的依據，瞭解如何發展出國小數學分數運算二階段式診斷評量工具，以檢測國小學童分數運算學習內容之錯誤概念的類型，和形成概念之影響關鍵。

從研究者的教學經驗發現，學童學習初對於「子集 / 集合」較「部分 / 整體」容易理解，因為連續量情境學童需要較好的預期基模，離散量只要簡單的分割，再加上連續量與離散量對分數意義的認知結構也會有所不同。故本研究的内容涵蓋分數概念是從離散量情境及連續量下進行等分、相同單位量比較大小、不同單位量比較大小、分數加減、分數乘除之處理。

至於比、比值、比例內容在國小數學教材的處理上，通常是把分數的這種意義與上述內容分開處理，故不在本研究範圍內。

第五節 研究限制

本研究是屬於初探性研究，旨在瞭解學童在分數運算上的概念類型。受限於研究者之教職工作、研究是屬於初探、及研究工具尚未能確定其信度與效度等情況下，造成研究者在研究場域與研究對象選取上，存有許多限制。研究者在人力、時間及經費等因素之考量，僅以台東縣為研究場域，研究對象是以國小六年級學童為母群，在此研究條件之下，研究結果在推論與廣泛性上確實存有其限制，但對於以二階層測驗工具瞭解學生數學概念，及學生在分數運算概念類型的探究，應有其可參考性。

第二章 文獻探討

本章就分數概念和迷思、錯誤類型及二階段式診斷評量工具這三方面進行探討。第一節為分數概念，第二節為迷思、錯誤概念之探究，第三節為二階段式診斷評量工具之探討。

第一節 分數概念

壹、分數的意義

一、分數之定義

我們對於分數的了解，可能從切水果開始。將蘋果切為兩半，一半就是二分之一，二分之一就是用來數一半的東西的數。無疑這是分數的主要用途之一。但是數學家把分數視為一種關係，為 m/n 的關係。 m/n 可以表示兩種量數之間除法的結果， $m \div n$ 的商是 m/n 。在除法關係中，亦可以說 m/n 表示 m 有幾個 $1/n$ ，此時 $1/n$ 可以為 $2/3, 4/6, 6/9, \dots$ 等無數個分數（劉秋木，2004）。

分數概念的意義具有多重的特性，在不同的問題情境中就有不同的意義，綜合學者提出的分數意義彙整如下（林碧珍，1990；教師研習會，2001；國立編譯館，1997～2001；康軒文教事業，1997～2006；南一書局企業，1997～2006；翰林出版事業，1997～2006；黃權貴，2002；龐嘉芬，2002；曾靖雯，2003；黃寶彰，2003；蔡麗蓉，2003；顏素霞 2003；孫碧霞 2004；劉秋木，2004；Hunting，1986）。研究者將上述文獻整理如表 2-1。

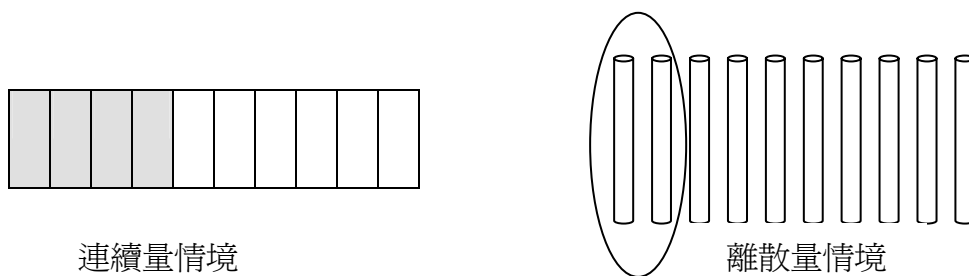
表 2-1-1 學者對分數概念意義的看法

學者	對分數的看法
Kieren (1976)	1. 整數系的擴展 2. 具有稠密性、無窮可屬的數系 3. 可代表測量的量或數線上的一點，能被用來互相比較並加以計算 4. 具有等值分數的特徵

	5. 可用來代表比例、乘法的操作
國立編譯館（1981）	1. 表示操作 2. 表示量的大小 3. 表示比值 4. 表示除法的商 5. 表示數線上的一個數值
Behr, Lesh, Post, & Silver（1983）	分數具有五個面向： 1. 部分---全體（part-whole） 2. 比（ration） 3. 商（quotient） 4. 運算子（operator） 5. 測量（measure）
Behr et al.（1983）	1. 分數測量（fraction measurement） 2. 比（ration） 3. 速率（rate） 4. 商（quotient） 5. 線性座標（linear coordinate） 6. 小數（decimal） 7. 運算子（operator）
Gibson（1984）	1. 整塊面積的一部份 2. 離散量集中的子集合 3. 數線上的一點 4. 兩數相除所得的商 5. 比例 6. 分數同時還有幾種與整數不同的意義，如等值分數
Nesher（1985）	1. 部分---全體（part-whole） 2. 兩數相除的結果（a result of division between two whole numbers） 3. 比（ration） 4. 運算子（operator） 5. 機率（probability）
林碧珍（1987）	分數視為某區域的一部分，數線上的一數值；看成小數；看成商；集合的一部分；用來比較；單位分數的相加；看成比值，當作運算；當成度量。
Ohlsson（1988）& 劉秋木（1996） & 吳昭容（1996）	從數學的建構來看，認為 m/n 形式符號指示四種建構： 商的函數（等分、包含除、縮小、引出） 有理數（分數、測量）

	二元向量（比、內涵量、比例、速率） 合成函數（運算子）
楊壬孝（1989）	一個整數的相等的部分；一個集合等分組後的幾組；數線上的某一數值；兩數相除的結果。
國立編譯館（1990）	1. 部分與全體的比較 2. 除法的活動 3. 等分割 4. 小數的另一種記法 5. 比的意義 6. 測量
教育部 （國小課程標準）（1993）	1. 表示操作：即在具體物或圖像上進行「分的活動」，重視具體物操作與分數符號兩者的連結。 2. 「部分/全體」：包括連續量與離散量的情境。 3. 線上的一數值：此意義又分為兩種（1）表是數線長（2）表徵為數線上的一點 4. 兩數相除的結果 5. 比例、比值。 6. 表示量的大小：如 $\frac{1}{10}$ 加上名數「公尺」即為固定長度量 $\frac{1}{10}$ 公尺。

從國內外學者對於分數的意義來看，大部分的學者都認為分數的意義中包含部分-全體的意義，一般而言又可細分為連續量情境（區域與部分區域的關係）及離散量情境（子集與集合的關係）。我們在國小數學教材的情境中也呈現這兩種分數的意義，如在下面的圖中，黑色部分的面積佔全部面積的幾分之幾？（連續量情境）以及「1包吸管有10枝，2枝吸管是幾包？（離散量情境）。此外，也有部分學者認為分數是一個數，可以是數線上的一個點。在本研究中，將探究學生在上述各種分數意義上的表現，透過給定一個分數詞請學生在規定的情境中（離散量、連續量、數線…）將該分數詞表徵出來（如：在給定的情境中表徵出 $\frac{2}{5}$ ）；以及給定一個情境，請其用分數來表示該情境（如圖2-1中的黑色部分面積是全部面積的幾分之幾；圈出來的吸管是幾分之幾包？）。



【圖 2-1-1】分數意義的連續量情境與離散量情境

二、兒童的分數概念發展

瑞士心理學家皮亞傑（J.Piaget）指出學童的認知發展是漸近的。由相關研究（引自林宏仁，2003；蔡麗蓉，2003；曾靖雯，2003）得知：

（一）Piaget 等人（1960）發現：

3-8 歲的孩童在處理長度、面積的分數問題時，孩童會先處理 $\frac{1}{2}$ 的分數問題，依序再為 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{5}$ 、 $\frac{1}{6}$ 。故兒童的分數概念發展依序為：

- ①四歲到四歲半的兒童，對一物分為二半甚為困擾，在分割之前缺乏預期目標的能力，也未注意分配的各部分是否相等。關於不同形狀的分割，長方形比較容易，圓形次之，正方形較難。這階段的兒童最大的特徵是缺乏部分與全體之間任何的關係。
- ②四歲到六歲的兒童對於規則的與小範圍的東西有分半的能力，但如果原來整體的大小增大了，其分成一半的能力更要延緩。將一物分成相等的三部分的能力尚未表現，在分割圓形中利用長方形的餅比較容易解決。
- ③六歲到七歲能成功的實施三等分的做法，不用嘗試錯誤的方式。但其操作的瞭解，還是在具體的操作層次。在這個階段的兒童具有整體性的保留概念，兒童了解到將各個塊數的總量與整個餅是一樣的。但對五等分仍有困難。

④十歲左右兒童能實施六等份的分法，首先利用三分法分一個餅，然後將所得的三塊餅再二分法。

(二) Pothier (1981)、Pothier & Sawada (1983) 發現：5-9 歲的兒童，在分割圓形或長方形的分數板的能力表現為 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{2n}$ 、 $\frac{1}{3}$ 及 $\frac{1}{5}$ 、 $\frac{1}{9}$ 及 $\frac{1}{15}$ 。故針對五歲至九歲兒童的分割能力的發展依序為：

①分配 (sharing)

這階段兒童開始學習分半的機制，及如何從圖形的中間建構一條線，如此使兒童能夠分割矩形和圓形一半和四份。但此階段的兒童會有無法達到公平分配的要求，或分的份數比要求的份數多，或未將圖形分盡等現象。

②分半算則 (algorithmic halving)

此階段以熟悉對摺 (halving) 步驟為明顯特徵，兒童不僅能夠將圖形分為二份或四份，也可以分成八份，甚至十六份。換句話說，兒童能夠獲得雙倍的塊數，即以 2 的次方為分母的分數。但此階段兒童仍未擁有等份的概念。

③偶數等分 (evenness)

此階段當兒童再分割物體時開始注意到部份的大小與形狀，兒童開始注意每一部分是否等分。雖然兒童尚無法將一物等分為三等分或五等分，但已能辨別公平或不公平。這階段的兒童已能處理偶數塊的等分動作。

④奇數等分 (oddness)

兒童在積數等分階段會使用數數算則，就是一快一塊的分，以數數確定份數以後，再加以調整已分割線條已達到等分的條件。

⑤合數等分 (composition)

在第四階段的數數算則，只是適合於小的奇數質數而已，對於 9、15 等較大奇數的等分就顯得笨拙，且使兒童不易注意到等分的要求。要等分 9、15 等合數的分割，應以更有效率的方法。例如要等分 9 份，先將圖形三等份，

再將每一等份再分成三等份，即達成九等份。也就是兒童在此階段以可採取乘法算則，去確定分割後的份數，如此兒童則能有效地建構所有的單位分數。

(三) Streefland (1987) 發現：兒童先會處理 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{4}$ 的分數問題，然後才會處理 $\frac{1}{3}$ 的分數問題。

三、分數概念的難易水準

依據楊壬孝針對國中小學生分數概念所做的研究報告，將分數概念的難易程度分為五個水準，參考劉秋木特別加以說明的部分，整理如下：(楊壬孝，1989；劉秋木，2004)：

水準 1：【能由具體操作，說出分數的概念。】

(1) 一個圖形的一部分：【例如：下圖黑色部分是佔圖形的幾分之幾？】



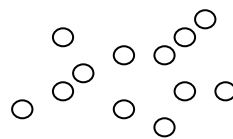
(2) 比較分數的大小 (同分母)

(3) 分數的擴分

水準 2：【能由一或多個基準單位量 1 等分割成若干份，再合成其份數，算出實際數量，】

(1) 集合的一部分：

(例如：建國贏得下圖中彈珠的 $\frac{2}{3}$ ，問建國贏了多少彈珠？)



(2) 比較分數的大小（同分子）

(3) 分數的約分

(4) 同分母分數的加法

(5) 從 1 減去一部分：

（例如：小明爸爸用薪水的 $\frac{3}{5}$ 繳所得稅，問繳稅後薪水剩幾分之幾？）

水準 3：【在離散量、以度量的連續量，或以「全部」為單位量的情境下，
解決單位分數倍問題。】

(1) 找出圖形的一部分：

（例如：小明贏得下圖彈珠個數的 $\frac{1}{3}$ ，畫一個圈表示小明所贏得的彈珠。）

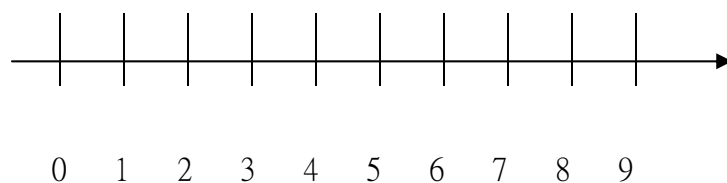


(2) 比較分數的大小（異分母）

(3) 分數的乘法（例如：一袋李子有 12 個，桌上有 $\frac{1}{3}$ 袋，哥哥吃了桌上李子的 $\frac{1}{4}$ ，它吃掉了多少袋李子？）

(4) 數線上的數值（例如：請在下列數線標出所給的各數：）

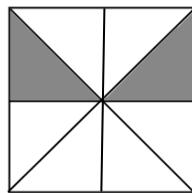
$(\frac{3}{5}, 1\frac{1}{5}, \frac{9}{5})$



水準 4：【透過兩量關係的圖示，表現帶分數與 1 的關係，解決分數除法的問題。】

(1) 圖形的一部分：(例如：有一個正方形的客廳，要在地板上鋪磁磚，

如下圖，黑色部分是全部的幾分之幾？)



(2) 兩分數之間有無數個分數 (稠密性)

(3) 分數的除法

(4) 分數是數的觀念

水準 5：【能使用通分、約分、擴分的方法解決異分母比較的問題。】

(1) 兩分數之間的通分與次序的觀念

(例如：寫出一個在 $\frac{1}{2}$ 與 $\frac{2}{3}$ 之間的分數)

(2) 基準量

(例如：小英將她零用錢的 $\frac{1}{4}$ 買糖果，建國也將他零用錢的 $\frac{1}{2}$ 買糖果

①小英可能比建國花的錢多嗎？

②請說明理由。)

(3) 代表數與不等數

(例如：甲、乙、丙三數均為正整數，當在甚麼情形下， $\frac{甲}{乙} < \frac{甲}{丙}$ ？)

由以上文獻得知，在學童尚未學習分數概念前通常倚靠知覺做判斷，無法使用不同分數詞表示不同情境的意義。一旦兒童引進累進性合成運思於分數的情

境，就可以說出 $\frac{1}{5}$ 是「五等分的其中一等分」，雖然如此，但仍無法進行單位分數的累積活動，例如： $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ 的答案可能是 $\frac{2}{10}$ ，而不是 $\frac{2}{5}$ 。此時，教師會進行子分割活動，經過部分全體運思的運作，發展出加法性分數，兒童開始認為 $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ 的答案可能是 $\frac{2}{5}$ ，換句話說1個 $\frac{1}{5}$ 加上1個 $\frac{1}{5}$ 和起來是2個 $\frac{1}{5}$ 也就是 $\frac{2}{5}$ ，而不是 $\frac{2}{10}$ 。接著處理10個積木的 $\frac{2}{5}$ 時，兒童開始認為10個積木的 $\frac{1}{5}$ 是2個積木，2倍的 $\frac{1}{5}$ 個積木是4個積木，所以10個積木的 $\frac{2}{5}$ 是4個積木。學童在這裡會發現10個積木的 $\frac{2}{5}$ 和10個積木的 $\frac{4}{10}$ 是相同的，但是覺得 $\frac{2}{5}$ 與 $\frac{4}{10}$ 卻是不同的，因為 $\frac{2}{5}$ 與 $\frac{4}{10}$ 的子分割活動是不同的。換句話說，學童會無法掌握單位分數與部分分數（非單位分數）之間的關係。

當學童能察覺10個積木的 $\frac{2}{5}$ 和10個積木的 $\frac{4}{10}$ 是相同的，同時也認為 $\frac{2}{5}$ 與 $\frac{4}{10}$ 是同一分量的測量值時，學童會有雙向的部分全體運思與子分割單位化概念，當從全部中拿取二次部份時，學童不會失去全部，在這一個階段，學童會具有分數乘法的概念，分數單位已由加法性分數會逐漸變成有等值分數的概念。

總之，分數概念的發展會經過建立整數的複合基模之概念基礎，藉由離散量、連續量情境的應用形成多重等分的協調基模，進而提昇到部分等份的協調基模。因此，以上分數的概念發展都是在為分數的乘除運算作合理的鋪陳。

貳、分數教材分析

一、分數之教材綱要

(一) 我國數學課程分數之教材綱要比較

表 2-1-2 我國 64 年、82 年、90 年、92 年版數學課程分數之教材綱要比較

年級	64 年	82 年	90 年	92 年
一年級	無	無	N-1-7 在等分好、整體 1 能明顯出現之具體生活情境中(包含連續量、離散量),能以真分數(分母在 20 以內)描述內容物為單一個物的幾份,並能延伸真分數的意義,進行同分母真分數的合成、分解活動(和 <1)。	無
二年級	1. 分數的初步概念。 ($\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{4}$ 的意義)	1. 分數概念的初步認識。 2. 分數的讀法轉換成記法。		2-n-10 能在平分的情境,認識分母在 12 以內的單位分數,並比較不同單位分數的大小。
三年級	1. 分母為一百以內的真分數的認識。	1. 分母為 20 以內的真分數的認識。 2. 分母為 10 的真分數。		3-n-09 能在具體情境中,初步認識分數,並解決同分母分數的比較與加減活動。

年級	64 年	82 年	90 年	92 年
四年級	1. 分數的種類。 2. 同分母分數的加減。	1. 分數的種類。 2. 真分數的概念。 3. 假分數的認識。 4. 同分母分數的加減 5. 小數與分數(分母為十、一百、一千)的雙向連結。	N-2-5 在等分好、整體 1 能明顯出現之具體情境中,能以真分數來描述單位分數內容物為多個個物的幾份,進行同分母真分數的合成、分解活動,並理解等值分數的意義。 N-2-6 在具體情境中,能以假分數或帶分數描述具體的量,並能解決分數的合成、分解以及簡單整數倍的問題。	4-n-06 能在平分情境中,理解分數之「整數相除」的意涵。 4-n-07 能認識真分數、假分數與帶分數,熟練假分數與帶分數的互換,並進行同分母分數的比較、加、減與非帶分數的整數倍的計算。 4-n-08 能理解等值分數,進行簡單異分母分數的比較,並用來做簡單分數與小數的互換
五年級	1. 分數和整數小數的相互關係。 2. 分數的約分、擴分及大小比較。 3. 異分母分數的加減。 4. 分數乘除以整數。	1. 等值分數。 2. 分數的數線。 3. 把分數視為整數除法的結果。 4. 分數乘以整數的乘法。	N-2-19 能利用等分好的線段上,做出一條簡單的整數數線,並能進一步延伸至簡單的分數和小數的數線。	5-n-04 能用約分、擴分處理等值分數的換算。 5-n-05 能用通分作簡單異分母分數的比較與加減。 5-n-06 能在測量情境中,理解分數之「整數相除」的意涵。 5-n-07 能理解乘數為

				分數的意義及計算方法，並解決生活中的問題。 5-n-11 能將分數、小數標記在數線上。
--	--	--	--	--

年級	64 年	82 年	90 年	92 年
六年級	1.整數、小數、分數的統整。 2.乘數、除數是分數的乘除。 3.分數乘除混合。 4.分數、小數的混合計算。	1.約分和擴分。 2.通分。 3.分數除以整數的除法。	N-3-3 在具體情境中，理解通分的意義並運用通分解決異分母分數的合成、分解問題。 N-3-4 在具體情境中，解決分數乘以分數的問題，進而形成分數倍的概念。 N-3-6 在具體情境中，能用分數、小數表示除的結果(除的結果為有限小數) 3-9 能理解同類量中不同單位間的關係，並作化聚活動(可以有分數、小數)。	6-n-03 能理解除數為分數的意義及計算方法，並用來解決生活中的問題。 6-n-05 能作分數的兩步驟四則混合計算(兩步驟)

註：參考自楊禮綾、洪淑君、黃淑君

64 年版數學教材強調數學知識的重要，82 年版及 90 年版課程暫行綱要重視的是社會歷程的學習模式，而 92 年版課程綱要又回過頭強調 64 年版的數學知識。換句話說，除了數學知識外，92 年版課程綱要也將演算能力、抽象能力及推論能力的培養視為是整個數學教育的主軸。由以上教材綱要之比較研究者也發現，特別以分數學習更是如此，一至三年級分母大致為 20 以內的真分數的認識，可是在九年一貫課程之後數學綱要中三年級就出現解決同分母分數的比較與加減活動，再經由分年細目具體陳述，若要學童在四年級理解分數之「整數相除」的意涵，認識真分數、假分數與帶分數，熟練假分數與帶分數的互換，進行簡單異分母分數的比較，並用來做簡單分數與小數的互換，促使至六年級得以能作分數的兩步驟四則混合計算，如此快速的從具體情境提昇至抽象情境來解決問題，勢必要透過

教材脈落清楚呈現及教師適當之引導。總之，教師若能掌握學童分數概念之發展，在這課程銜接之際至未來全面實施 92 年版課程綱要時才不至於做出錯誤的診斷及引導。

二、現行各主要國小教科書版本中與分數相關的教材內容，研究者分析九十五學年度國小數學領域課程分數四則教材，以表 2-3 呈現之。

表 2-1-3 九十五學年度國小數學領域課程分數四則教材分布

年級	K 教材	N 教材	H 教材
一上	無	無	無
一下			
二上	無	* 在等分成 10 份以內的連續量的情境中，以單位分數說出其中的 1 份	無
二下	* 在連續量的情境中，認識單位分數的意義 * 單位分數的說、讀、聽、寫、做 * 在具體的情境中，比較單位分數的大小 * 在離散量的情境中，認識單位分數的意義	無	無

年級	K 教材	N 教材	H 教材
三上	* 認識分母為 20 以內的真分數及其意義 * 認識分子、分母 * 真分數的說、讀、聽、寫、做 * 建立分數的數詞序列	* 在等分成 10 份以內的連續量與離散量情境中，以真分數描述其中的幾份及說、讀、聽、寫 * 認識分母、分子合真分數的數詞序列	* 進行單位分數的命名活動 * 認識分數的記法與讀法 * 真分數的說、讀、聽、寫及數詞序列 * 認識分子與分母 * 連續量同分母真分數的

	* 在具體情境中分數的大小比較		加法 * 連續量同分母真分數的減法 * 同分母真分數的大小比較
三下	* 透過具體活動，解決分母為 20 以內，同分母真分數的合成與分解問題(和<1) * 用算式紀錄同分母真分數的加減問題 * 透過具體操作，解決生活情境中已列出的分數加減算式填充題	* 在等分成 20 份以內的連續量與離散量的情境中，以真分數描述其中的幾份，及說讀、聽、寫、做 * 建立分母為 20 以內真分數的數詞序列	* 在連續量的情境下，進行 $\frac{10}{10}$ 和 1 的比較活動。

年級	K 教材	N 教材	H 教材
四上	* 認識真分數、假分數、帶分數的意義 * 了解假分數、帶分數和整數的互換 * 以真分數描述單位分數內容物為多個個物的幾分 * 理解在平分情境中，分數是整數相除結果的意涵	* 能以真分數來描述單位分數內容物為多個個物的幾份 * 能利用等分好的線段，做出 1 條分數數線 * 認識假分數和帶分數 * 假分數和帶分數的關係 * 假分數和帶分數的互換	* 以連續量的情境，從 $\frac{1}{10}$ 累加的過程中，認識假分數並命名之 * 以連續量的情境，從 $\frac{1}{10}$ 累加的過程中，認識帶分數並命名之 * 整數相除以分數表示 * 假分數和帶分數的等值意義及互換
四下	* 進行同分母分數的合成、分解活動 * 能透過具體表徵，解決生活情境問題中列出的加減算式填充題 * 兩步驟加減混合題，並用算式紀錄	* 在等分好、整體 1 能明顯出現之具體情境中，能以真分數來描述單位分數內容物為多個個物的幾份，進行同分母真分數的合成、分解活動，並理解等值分數的意義。	* 在「單位分數所指示的內容物為多個個物」的情境下，解決同分母(分母 ≤ 12)分數的合成分解問題，並利用算式紀錄問題與答案。

年級	K 教材	N 教材	H 教材
五上	* 在整體「1」能明顯出現之具體情境中，認識等值分數 * 了解擴分的意義、方法及其應用 * 了解約分的意義、方法及其應用	無	* 經由操作認識等值分數 * 連續量分數的擴分 * 離散量分數的擴分 * 離散量分數的約分 * 連續量分數的約分 * 察覺兩異分母分數的公倍數，並進行大小的比較（分母不互質） * 以通分的方式將兩個異分母分數相加 * 以通分的方式將兩個異分母分數相減
五下	* 認識分數的數線 * 認識分數乘以整數的意義，並解決之 * 將情境中分數的整數倍問題記成算式填充題 * 能解決分數除以整數的問題 * 認識通分的意義 * 會做異分母分數的加、減計算 * 能做分數和小數的互換	* 在具體情境中，能以假分數或帶分數描述具體的量，並能解決分數的合成、分解以及簡單整數倍的問題。	* 在「單位分數所指示的內容物為單個個物」的情境下，解決單位分數的真分數倍（分母為 10 或 100）的問題，並用有乘號、除號的算式紀錄解題過程與結果。

年級	K 教材	N 教材	H 教材
六上	* 理解分數乘以分數、整數乘以分數的意義 * 經驗分數乘法的計算格式 * 根據乘數與 1 的大小關係，判斷被乘數與積的關係	* 能在具體情境中，理解約、通分的意義 * 透過約分，將分數約成最簡分數 * 能在具體情境中，透過通分，進行異分母分數的大小比較	* 認識最簡分數的意義 * 異分母分數的大小比較（分母互質；分母不互質） * 定義通分 * 異分母分數的加、減
	* 能解決同分母分數除以分數的問題 * 能解決異分母分數除以分數的問題 * 根據除數與 1 的大小關係，判斷商和被除數的大小	* 能在具體情境中，透過通分，進行異分母分數的加法問題 * 能在具體情境中，透過通分，進行異分母分數的減法問題 * 透過通分，解決異分母分數的連加、連減和加減混合的問題	* 整數乘以分數 * 分數乘以分數 * 假分數和帶分數的乘法 * 分配律 * 分數除以整數 * 分數除以分數 * 整數除以分數 * 分數的四則運算
六下	* 解決分數加、減、乘、除混合的四則問題 * 解決分數與小數四則混合計算問題	* 在具體情境中，解決分數乘以分數的問題，進而形成分數倍的概念	* 解決「帶分數的、整數倍、分數倍、帶分數倍、真分數倍（分母為 10）」問題，並討論「先將帶分數化為假分數」的解題策略，以重新表現其解題過程，並用分數算式紀錄解題過程。

各版本在分數教材的設計方面，除了部分一整體的分數之外，也安排一些子集—集合的分數意義，在連續量情境下更少不了以離散量情境佈題，足以促進學生分數概念的成長；在分數合成分解教材的安排，集中在四年級教材完整出現，並做加深加廣，不同情境的討論及解題；在等值分數教材安排也在四下、五上出現，各版本的處理方式，分別在連續量情境下採直覺認知上的對照，而在離散量情境下採數量上確定的方式上解題，倘若在此時加入分數數線的學習，相信必能使

學童更加瞭解分數的意義；就分數乘法教材而言，研究者認為，大部份教材到六年上才完整呈現，似乎稍嫌慢了一點，由於學童五年上學期分數的約分、擴分的學習內容已習之，事實上可以在五年級下學期，將分數乘法教材納進來，如此學童的分數概念發展會較為連貫，並做六年級學習分數除法內容之合理鋪陳；就分數除法教材而言，分數除以整數方面，各教材皆以分割份數的方式解題，在分數除以分數方面，大多是從整數除法的解題方式進行，所以在解題過程中，會出現強調題意的澄清及算則的歸納兩種情境。總之，在分數概念的發展當中，儘管各版本雖然進度有些微差異，教師備課時，則需要檢視所使用版本安排了哪些前置經驗，學童究竟已習得哪些舊經驗。換言之，倘若教師能針對學生進行學習需要分析，屆時必將能拉近師生之間溝通的距離及時間，同時也能與主題更加契合。

三、美國數學教師協會《學校數學的原則和標準》(NCTM,2000)與分數有關的內容如下：

學前幼稚園至二年級，學生需要瞭解並表徵常用的分數，例如： $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$ 。

三年級至五年級發展分數是「單位整體的部分」，或是「全數除法的結果」之理解，而且使用模型、基準點和等值形式，判斷分數的大小，辨認並產生常用分數、小數和百分數的等值形式；在計算方面，發展與使用策略估算與學生經驗相關的分數問題情境及加減運算。

六年級到八年級，有效率地比較和排序分數、小數和百分數在數線上找到它們近似的位置，彈性運用分數解決問題；在計算方面，發展、瞭解、分析分數算術運算的意義、演算法則及效果，依據不同的情境，選擇適當的方法和工具，流暢地使用這些算則。

參、本節文獻對研究的啓示

具體而言，文獻中學者及教材對分數意義有以下共通看法：最核心的部分——全體的關係、子集-集合的關係、數線上的一點、兩數相除的結果及比的意義。而這五種意義，在國民小學分數教材中，是較容易接觸到的。

現行我國國小數學領域課程，分數運算更佔了較大篇幅，研究者認為其教材呈現的順序如下較為適宜：

二年級學習內容為對分數概念的初步認識、分數的讀法轉換成記法，學生主要學習分數的概念。

三年級有了對分數概念的初步認識之後，開始學習簡單的真分數，不過分母僅限於 20 以內的真分數認識。

四年級學生的學習，在具有真分數的基礎下進行同分母的加減，並且瞭解分數的種類同時認識假分數、帶分數及其換算。

五年級學生的分數學習，在於把分數視為整數除法的結果，藉由分數的數線認識等值分數，菁華在於熟練通分、約分和擴分，進而學習分數的乘法。

六年級分數的學習重點在於熟練分數的運算上進階到處理分數的除法。

綜合上述，在本研究中將更聚焦在分數的運算，換句話說，評量試題內容也將以前面四種：全體的關係、子集-集合的關係、數線上的一點、兩數相除的結果為核心主軸，來發展評量工具。

第二節 迷思、錯誤概念與分數學習的困難

壹、迷思概念的意義

一個主題的問題或現象的個別概念是合理的，但和這個主題上專家已建立的概念是不同的。對學生的學習，當學生面對之前從未學習過的單元時，往往不當的教學容易導致學習知識上的缺陷，困惑與誤解，而這些因素常常造成所謂認知上的迷思概念(Dawson,1993)。

貳、研究迷思概念的目的

學者們認為分析學生的錯誤概念可以了解學生內在的概念，使我們更清晰地瞭解學生的心理運作，對於教學策略的修正、補救教學的實施有相當大的幫助。有關研究迷思概念的目的，(引自黃馨緯，1995)分成近程、中程、終極目的三各層次來說明，依序如下：

一、近程目的在於了解迷思概念的內容及成因

目前學術界探討迷思概念的途徑有二：(一) 探討迷思概念的內容，著重於描述迷思概念。(二) 探討迷思概念的原因。這些研究結果可提供教師教學時判斷學生的思考形式方法，必要時可以根據迷思概念的成因加以修正，以促進概念學習。同時，亦可提供課程編製者重新省思課程的編排與選擇的內容。

二、中程目的在修正迷思概念

發現學生的迷思概念後，接著就是要針對其癥結加以修正。迷思概念的修正主要是指修改錯誤的修改方式，包括重組整個認知結構、增強充實或修改局部知識。此外，迷思概念的產生也可能是因為推理思考的時間不足，所以盡可能提供讓學生足以充分思考推理的時間，以修正其迷思概念。

三、終極目的在於追求教學績效

1980 年代受到建構主義的影響與研究典範的轉變，許多教學者及研究者體會到學生所學到的概念與專家概念有相當大的差距，學校的正式課程與學生所經驗

的課程間也有相當大的距離。爲了不使學生的迷思概念影響教學效果，首要之務就是要研究學生的迷思概念爲何？了解形成的因素爲何？配合課程改革，讓教師在介紹新概念時，能先克服學生先入爲主的先備概念，確保教育績效的達成。

參、迷思概念的成因及特性

在數學評量上，除了一時不小心外，常發現學生的錯誤是具有系統性的錯誤，而且錯誤常發生在學生應解題需要，而自己所「發明」的方法。學生的錯誤大致包括：缺乏概念或概念不正確，使用不適當或錯誤的過程，憑直覺或關鍵字作反應（蘇慧娟，1998）。

造成學生產生迷思概念的原因很多，一般建構主義者認爲，學生常習慣於用原有觀點來解釋遇到的新情境，因此，他們的迷思概念不僅來自無法吸收新的知識，更是來自於學習者本身直覺地錯誤解釋（邱慧珍，2002）。

一、迷思概念的成因

吳訓生（2003）指出學生迷思概念的原因大致包括：

- （一）、從日常生活經驗而來。
- （二）、不精熟的先備知識或技能。
- （三）、將新知識或就經驗做錯誤的連結或類推。
- （四）、正式或非正式的教學。
- （五）、不完全的學習或學習的知識相互干擾混淆。
- （六）、從字義的聯想、混淆或知識的缺乏而來。
- （七）、來自環境、文化和漸漸養成的習慣。
- （八）、由隱喻（metaphor）的使用而來。
- （九）、使用了錯誤規則。

由上所述，老師在教學時，若能了解學生可能產生的迷思概念，設計一些避免或修正迷思概念的教學活動，這樣不但能避免學生產生迷思概念，對於學生的學習也更有所助益。

二、迷思概念的特性

迷思概念除了學生本生所建構的之外，上有一些特性，吳訓生（2003）指出迷思概念具有以下特性：

- （一）不完備性：在各類迷思概念中，可發現其知識不夠完整，對問題的思考不夠周全，以致說出的概念也失之片面或零碎。
- （二）過程式：迷思概念是在概念形成的過程中出現的。
- （三）思考性：迷思概念雖然是一種陳述出來的內容，但它含有概念思考的成分。
- （四）非正統性：與科學家的或專家的說法相比，這些迷思概念就有別於前者。
- （五）普遍性：某些迷思概念確實普遍性較高，綜觀全球各地可發現許多一樣的迷思概念。
- （六）個別性：有許多迷思概念及其想法是相當特別的，屬於受訪者專有。
- （七）不穩定性：因學生對概念沒有清楚認識，因而沒有確定的見解，想法容易改變，顯得不穩定。
- （八）頑固性：有些迷思概念很容易經過教學或解說，就得到改變；但有些迷思概念雖經過一再講解，它仍會一再出現。
- （九）歷史性：有些迷思概念具有歷史前導（historical precedence），即同樣的錯誤，以前的學生也發生過。

肆、兒童分數迷思、錯誤概念之相關研究

表 2-2-1 對於學生分數迷思、錯誤概念相關之研究

研究者	分數迷思、錯誤概念及相關研究
Lankford(1972)、Edwards (1983)及 Painter(1989)	1.分數乘法錯誤： (1) 先通分，再計算。 (2) 將第二個分數顛倒後，再計算。 (3) 交叉相乘而得到分子與分母。 (4) 分母相乘，分子卻作加法運算。 (5) 分數乘整數時，分數不變，只處理整數部分。 (6) 帶分數乘整數時，分數不變，只處理分數部分。 (7) 帶分數乘整數時，整數、分數分別自行做乘法運算。 2.分數除法錯誤： (1) 計算方法錯誤（用乘法計算）。 (2) 計算錯誤。 (3) 不瞭解計算步驟： ①被除數倒置。 ②除數及被除數均倒置。 ③加分子，乘分母。 (4) 約分時發生錯誤： ①分母相約分。 ②分子相約分。 (5) 分母不變，但分子直接做除法運算。 (6) 帶分數除以整數時，只做整數之間的運算。 (7) 分母不變，但分子相減。 (8) 未求出第二個分數的倒數，而直接做乘法運算。 例如：$\frac{1}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{12}$
Tatsuoka (1984) 及 Painter (1989)	1.分數的加法運算錯誤： (1) 分子加分子，分母加分母。 (2) 求出公分母後放在分母，而分子為原分子相加。 (3) 分母相乘，分子相加。 (4) 分母相乘，分子相乘。 2.分數的減法運算：

	(1) 通分後，分子為大數減去小數。 (2) 分母減分母，分子減分子而且是大數減小數。 (3) 求出公分母後放在分母，而分子為原分子相減。
黃金鐘（1987）	1.分數意義不瞭解。 2.不把分數當數來看。 3.分數在數線上的表現能力很弱。
劉天民（1992）	* 針對國中一年級： 1.學生在進行加減法運算時，誤用乘法運算性質。 2.學生在進行分數的四則運算時，各自對分子、分母及整數分開進行計算。 3.學生在處理帶分數化成假分數的問題時，常將分子計算錯誤。 4.學生在處理通分的問題時，常將分子計算錯誤。
吳相儒（2001）	* 針對國小四年級以下： 1.對分數的意義不瞭解，包括以整數來思考與來回答分數問題，或是只知道分數的型式，但不瞭解其所代表的意義。 2.對於單位量與單位分量無法明確辨認。 3.分量與單位分量間的化聚發生錯誤。 4.假分數化為帶分數時，受到整數十進位位值概念的干擾。 5.進行兩個分數的比較時，以分子或分母的大小作為判斷分數大小的依據。
陳和貴（2002）	* 針對國小五年級： 1.缺乏『等分』概念。 2.誤認為『等分』就是除了面積相等以外，形狀以必須相同。 3.忽略給定的單位量或對基準量的指認有困難。 4.將數線上的點表示分數時，未能考慮分數間的相對位置。 5.在『商』模式中，哪一個數該當分子或分母的概念上不清楚。 6.數感及估測能力欠佳。 7.相對關係型概念較弱。 8.在處理分數的大小比較及等價分數時，僅以分子或分母作為判斷的依據及作答文字題時不瞭解題意，對於單位的疏忽或缺乏判別多於數字的經驗或能力。

黃寶彰（2003）	*針對國小六、七年級： 1.對分數意義中的「部分-全部」、「數線上的一個數」、「比值」三各部分的了解不清楚，有缺乏等分概念、基準量混淆、二分法、忽略「全部」的量，忽略參考點將數線全長當作一單位、受到整數或小數數線的影響、除數和被除數顛倒、分子分母顛倒、用錯運算符號所形成的錯誤。 2.在分數運算方面，發現學童對分數的加、減、乘、除的運算並不熟練，造成學童在解決有關分數運算的應用問題時出現許多運算上的錯誤。 3.在比較分數大小方面，則受到學童分數運算不熟練的或對分數倍不熟悉影響，而出現錯誤。
-----------	--

分數的學習困難在學生學習過程中處處可見，從以上文獻中，我們可以發現分數的錯誤概念大致上可成分數概念的迷思及分數運算的錯誤類型。郭昇欣

（2005）指出學生在分數詞的迷思概念，主要可分成「等分概念的不足」、「辨識單位基準量有困難」、「數線上標出分數或讀分數有困難」三類，茲分述如下：

一、分數概念的迷思

（一）等分概念的不足：

大部分兒童知道一半就是要分成兩塊，但沒有等分的概念。在處理「部份/全部」的分數問題時不瞭解各部份均需等分。

（二）辨識單位基準量有困難：

處理分數問題最重要的一個概念是指認單位基準量，也就是「1」。從文獻中發現學生無論在處理「部分/全部」，「子集/集合」或數線的分數問題時，學生都有指認單位基準量的困難。學生無法指認問題中的單位量、只考慮到問題中的分子（分割後的量）及分母（分割份數），解題過程深受分子、分母的影響。

（三）數線上的標分數與讀分數

在數線上對單位量的指認時，有些學生把數線的分數問題看成是「部分/全部」的分數問題，而不注意其單位的標示。

透過觀察其在「等分」、「單位量」、「數線」方面的解題，可以大致了解學生對於分數概念的發展情形是否完備。若其等此三個子概念的表徵沒有困難，則兒童對於分數概念就有一個大致的了解，在處理接下來的分數運算過程中，就能夠掌握「分數」在解題過程中每一個步驟的意義，不會淪為只是熟練算則的「計算機」。

二、分數運算的錯誤類型

由於目前我國國小教材四年級學生在處理分數的加減、等值分數等問題所產生的迷思概念或兒童法會影響到五年級的分數學習。因此，學童在運算方面的錯誤迷思概念也會對日後更高深分數概念學習造成影響。Grady & Hutcherson(1981)分析三、五和七年級的學生所犯的錯誤，並分成六大類：1.演算的錯誤。2.基本事實的錯誤。3.概念的錯誤。4.位值的錯誤。5.多方面的錯誤。6.省略的錯誤；Engelhardt(1982)的研究中指出，他將學生所犯的錯誤分成四種基本的類型：1.機械性的錯誤。2.粗心的錯誤。3.計算上的錯誤。4.演算過程的錯誤；Ashlock(1986)將學生所犯的錯誤分成三大類：1.運算的錯誤：使用錯誤的運算符號。2.明顯的計算錯誤。3.算則的錯誤：步驟及運算次序上的錯誤（引自林彥宏，2002）。

學生在運算上的錯誤，除了「粗心」之外，錯誤類型往往起因於分數概念的不了解，而學生在解決情境題時發生了運算錯誤到底是因為對於算則的記憶錯誤，抑或是因為記憶算法，也就是大量熟練的結果，不可得知。因此，在探究兒童的分數運算方面時，另外加入學生對於計算記錄的情境回顧，也就是希望學生對於一個計算記錄選擇合適的情境問題，或是說明計算過程中的步驟是如何操作分數，被操作的分數單位為何。

伍、對本研究的啓示

探討學生迷思概念的主要目的，在於提供教師在教學時作為判斷思考形式及方法之用，使學生發展更正確的概念系統。根據上述文獻，學生在分數概念及運算上有許多錯誤迷思概念，因此本研究將針對學童對分數意義的瞭解、分數的四

則運算、等值分數、分數的比較大小的學習困難作為評量的細目。由於各種迷思概念的產生都各有不同的因素影響，因此也同時提醒研究者本人，在分析資料時，需細心地從學生的答題紀錄、解題過程及訪談紀錄去抽絲剝繭，才能找出真正的原因。若是教學者在進行分數教學前，能夠先了解學生可能的分數四則迷思概念，而在教學活動中，針對這些迷思概念加以釐清，並進行檢驗，則學生的分數概念將更清楚。除此之外，大部分的研究都是一個普遍性測驗，而在探究兒童所持錯誤概念理由時訪談的人數減少；或者是少數個案長期的觀察，對於個別學童的等分概念及單位量概念是否有不足，則往往在經過紙筆測驗後更需實施晤談工作，否則不足以了解其錯誤答案背後所持的理由，但是晤談工作除了耗時之外，每個教師晤談的技巧以及晤談的內容是否都能讓學生呈現其概念表徵背後的心像，實在有待商榷。而本研究另一個目的，就是希望改進評量方式，幫助教師能更快速發現學生概念錯誤之處。

第三節 二階段式診斷評量的工具

壹、二階段式診斷評量的定義

一般學科的評量方式多半採用紙筆測驗，分為開放式與封閉式兩種方式，封閉式測驗較有固定且客觀的評分標準，而開放式測驗的評分則較主觀，不同評分者，結果可能不一樣(郭生玉，1985)。封閉式測驗常採用選擇題，其缺點為不知學生是猜對的或真正了解。開放式測驗常採用計算題或問答題，教師可以透過學生的回答了解學生的思考過程，但學生易因表達能力不足使得填答意願低落。為了讓教師能夠透過紙筆確切掌握學生的學習狀況，並使以往在各科學學科的迷思概念之研究所獲致的許多結果能更有效、實際地應用於教學上，Treagust(1986)提倡發展二階段式(two-tier)概念診斷測驗之必要性。

Treagust(1986)所提出之開放式兩階段紙筆診斷評量分為兩部分，第一階段為選擇內容的知識，第二階段是探索理由的部分。若兩階段均為選擇題形式，稱為封閉式兩階段評量；若第一階段為選擇題形式，第二階段採開放式作答，稱為開放式兩階段評量。此種評量方式彌補傳統紙筆測驗的缺失，幫助教師了解學生在概念學習的狀態，也可診斷學生的錯誤概念。柳賢(2000)針對高一學生進行開放式兩階段評量測驗後提出，經由這種開放式兩階段的評量方式，教師可了解學生是否真正理解所學的知識而非一知半解。因此，若能針對某一特定的學科內容，應用既有的研究發現為基礎，設計成紙筆式、選擇題型的二階段式診斷測驗，當更可幫助科學教師了解學生在教學前、後所存的迷思概念，以對症下藥(楊坤原、張賴妙理，2001)。

二階段診斷評量工具的發展分為三階段：(1)確定內容，(2)從學生處獲得資訊，(3)發展診斷(Treagust，1989)。首先必須確定命題所涵蓋的相關內容，建構內容效度。接著透過非結構性晤談，蒐集學生錯誤概念類型，或參考相關文獻，獲取與學生的想法與學習情形有關的資訊，將所蒐集的資料歸納作為第二階段理由選項的選

目。最後的階段必須經由不斷的精鍊過程讓工具趨於完備。

陳建蒼(2001)利用二階段診斷評量診斷高一學生在對數函數的錯誤概念後形個別化補救教學，發現有效減少學生錯誤概念的產生；陳俊廷(2002)利用二階段診斷評量診斷高中生空間向量學習困難；李浩然(2003)利用二階段診斷評量分析國一學生分數成除法運算錯誤概念類型；陳忠雄(2003)利用二階段診斷評量分析高中學生三角函數概念學習錯誤概念類型；以上研究均指出二階段診斷評量較一般的紙筆測驗更能診斷出數學錯誤概念，並建議教師採用，由此可知利用二階段診斷評量作為數學科之學習診斷工具已成為趨勢。

本研究所採用的封閉式二階段診斷評量，第一階段是有四個答案選項，可判斷學生的概念發展是否達到概念獲得程序的分類層次，第二階段為理由選項，也是有四個理由選項，可診斷學生的錯誤概念，不採開放式作答而採取選擇題形式，是為避免學生填寫意願低落，空白率過高而無法蒐集學生錯誤概念類型。

貳、二階段式診斷評量的發展步驟

由 Treagust 所發展出來的二階段評量工具，兼具了晤談法之質性的優點與測驗法之量性的優點；二階段評量工具設計的編製程序，依據 Treagust(1988, 1995)所載將其分為三大部分：一、定義內容；二、獲得有關學生概念之證據；三、發展一診斷性工具，及其所包含的十項步驟，研究者彙整後茲將其發展步驟說明如下：

一、定義內容 (Defining the content)

前四個步驟是定義主題的概念範圍，使能適合於特殊的階層。這部分牽涉到命題內容知識陳述的確認，和概念發展關係。

步驟一：鑑定命題知識陳述

就研究主題的內容中，找出包含在此一特定領域內的知識，並將其中的概念逐項條列出來，以確定命題之範圍。

步驟二：確認概念發展關係

對研究主題相關之概念進行逐步確認，研究者可利用概念之間彼此的關聯性，仔細思考被選為教學內容的本質與範圍。

步驟三：連結命題知識與概念發展內容

每個命題知識的陳述皆要與概念發展內容中其對應之概念直接相關，確保被檢測的內容是具有其內部一致性，且彼此要能涵蓋整個主題。這是一種信度檢核：看兩者是否真正能檢測和覆蓋於相同主題區域。

步驟四：將試題內容效度化

命題陳述和概念發展關係是由學科學者、學科教師和學科專家檢核進行內容效度化。有任何矛盾或是不規則將被刪除，命題陳述和概念發展關係內容將因而被修正。如此是爲了檢證所有被發展的診斷題目，都能清楚的聯繫到被教過的概念，使被研究的內容和概念是合乎科學的精確，而最後完成修定的命題表和概念發展關係內容，反映出在此內容領域中來自專家的投入。

二、獲得有關學生概念的資訊（Obtaining information about students' conceptions）

第二部分是發展一診斷工具評鑑學生概念的過程。首先透過對先前研究文獻的檢視，之後來自晤談和開放式紙筆問題的自由反應資料，鑑定學生對該研究之學科內容的理解，如此該主題的學生概念的典型範圍就被確定。

步驟五：檢測相關研究文獻

收集該主題之相關研究文獻中有關學生的另有概念和概念化的困難範圍，可獲得學生的迷思概念以及學習時有困難的概念，作為發展二階段含另有概念的內

容選擇題選項之基礎資料，以建立資料庫。

步驟六：對學生實施非結構式之晤談

利用非結構化開放式的問題對學生進行晤談，來廣泛鑑定學生的另有概念之面向，以及誤解和（或）迷思概念的範圍，以獲取學生對此概念理解的程度。這部分也可以是事件訪談或事例訪談的卡片來引導，訪談題目內容來自前四步驟效度化後所定義的內容，來收集學生所反應的另有概念。

步驟七：發展學生可回答理由之選擇題

由來自文獻與晤談的概念資料，編製含命題知識陳述的選擇題紙筆測驗，題目內容來自前四個步驟效度化後所定義的內容。對一個班級或是一群學生進行施測，每題都留有空白給學生完成其為何選此答案的理由，以便從中獲取學生正確或迷思得概念。

三、發展－診斷性工具（Developing a diagnostic instrument）

第三部分工具的建構牽涉到兩階段題目的發展，第一階段要求學生對內容之反應，第二階段要求學生針對該反應所持的理由為何。這些理由選項的產生來自步驟五、六、七，並用來發展题目的第二階段。

步驟八：發展兩階段式診斷工具

兩階段式診斷工具的發展是來自選擇題，就如同 Tobin 和 Capie（1981）所設計之「邏輯思考測驗」的格式。每一測驗題中的第一階段選擇的是內容問題，通常有 2 至 4 個選項；第二階段是選擇第一階段的理由，通常包含 4 個以上可能理由選項，選項為綜合上述文獻、晤談、和開放式紙筆測驗所獲得的該題作答之理由，其中包含了迷思概念、正確概念或是完全錯誤的答案。

步驟九：設計雙向細目表

此一設計雙向細目表用來確保診斷性試題的題目皆能問到所列之命題陳述，且概念發展關係中的概念皆涵蓋在主題範圍之下。

步驟十：持續精練

透過不同的班級施測兩階段式選擇題的成功精練過程，可以保證在此主題下能找出學生的另有概念。而此精練過程可視為「兩階段式概念診斷工具」編製完成後的預試階段（引自郭昇欣，2005）。

以上發展歷程，研究者主要參考 Treagust（1988）所提出的建議程序，稍作調整而成。二階段式數學錯誤概念診斷測驗可作為成就測驗及探究錯誤概念的工具，不少學生雖在傳統教學中獲得記憶性的知識，而能在第一階段正確作答，卻在第二階段中顯示出對數學概念未真正瞭解。教學者可在一個特定主題單元教學的開始或結束時使用這種評量工具，若將其運用在數理、自然科學等領域上，教師將能夠更清楚、且有效率地瞭解學生的認知概念與架構，包括學生所持有的迷思概念。

除此之外，二階段試題的設計可用以改良傳統選擇題的僵化模式，也可以引導學生改變只重視死背知識而不求理解的嚴重缺點；此評量工具強調概念的理解，重視以學生的理由及包括已知另有概念為基礎而設計的二階段試題，近幾年來已成為許多研究學者所認同的研究工具，學生本身可在作答的過程中學習、澄清自我概念並幫助原有概念間的連結，因此二階段試題亦有助於教師了解學生學習上的困難，並進一步解決教學中的盲點，提昇學生學習效果。

參、二階段式診斷評量與國小數學相關之研究

一、二階段式診斷評量之相關研究

表 2-3-1 二階段式診斷評量相關研究之篇數

研究領域	研究範圍			研究者及研究年份（2000 至 2006 年）							總計
	國小	國中	高中	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	
數學領域	3	4	5	1	0	4	1	2	2	2	12
自然領域	14	8	0	1	3	1	6	2	7	1	20
其他	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
總計	17	12	6	2	3	5	7	4	9	3	33

（研究者整理）

從表 3-3-1 研究者發現，2000 年之後有 33 篇與二階段式診斷評量相關的研究，有 12 篇研究與數學有關；20 篇屬於自然領域研究；1 篇為視覺藝術課程相關研究。相較之下，僅有 3 篇是與國小數學相關之研究。

二、二階段式診斷評量與數學相關之研究

表 2-3-2 二階段式診斷評量與數學相關之研究內容

研究者	論文名稱	階段 範圍	研究內容
陳建蒼（2000）	高一學生對數函數概念層次教學成效研究	高中	探討高一學生在對數函數另有概念的類型，並針對學生的對數函數另有概念的類型與成因提出個別化補救教學策略，再進一步探討各種補救教學策略的成效。 研究中透過學生概念學習風格問卷調查、對數函數另有概念問卷調查、對數函數二階段診斷評量前測、學生學習日誌及個別晤談來診斷學生的另有概念，並歸納整理出另有概念的類型與成因。針對學生的另有概念的類型與成因，實施個別化補救教學策略，透過對數函數二階段診斷評量後測與學生學習日誌及訪談來確認個別化補救教學策略的成效。

研究者	論文名稱	階段 範圍	研究內容
李浩然（2002）	高雄市國一學生分數乘除法運算錯誤類型之分析研究	國中	探討高雄市國一學生在分數乘法與除法運算中可能產生的錯誤類型，進而分析造成學生錯誤類型之成因。研究工具採用分數乘除法運算二階段診斷評量試題與半結構式晤談，針對學生在分數乘除法運算錯誤類型情形進行調查，並整理、歸納出學生之錯誤類型，並同時藉由晤談進一步分析學生在分數乘除法運算錯誤之原因。
陳忠雄（2002）	高中學生三角函數概念學習錯誤類型研究	高中	探討高中學生在三角函數概念學習錯誤類型，並瞭解學生可能產生錯誤概念的原因。研究工具採用三角函數概念二階段診斷評量試題，針對學生在三角函數單元錯誤概念情形之調查，經整理、歸納出學生之錯誤類型，再以晤談方式進一步分析學生在三角函數單元概念錯誤之原因。
陳俊廷（2002）	高中學生空間向量學習困難的診斷測驗工具發展研究	高中	為發展高中學生空間向量學習困難的有效診斷工具，並探討高中學生在空間向量迷思概念的類型。本研究之樣本為高雄某中學高二與高三自然組與社會組的學生共 158 人。研究中，參照有關空間向量概念，經由數學教師問卷調查之後，設計七大類型開放式的問答題，然後發展成兩階段式診斷測驗工具，最後透過晤談來了解學生空間向量幾何思考層次的發展情形與與幾何的向量代數化過程。並確認學生在空間向量有哪些的錯誤型態與迷思概念。
蕭志芳（2002）	中高年級國小學童時間概念之探究	國小	針對國小三至六年級的學童，來探討學童的時間概念，為了避免傳統的一階段試題的成就測驗，所以二階段評量工具進行施測。
賴潔芳（2003）	二階段評量應用在高中學生三角函數學習成效之研究	高中	探討運用二階段診斷評量分析高中學生學習三角函數的錯誤概念類型，與錯誤概念形成的原因，並依據此項發現來設計針對高中學生三角函數之教學活動，據此探究此項教學活動對學生學習三角函數單元的成效。
陸昱任（2004）	論數學素養之意涵及小學階段評量工具之開發	國小	即以數學素養為研究方向，擬定研究目的三項：（1）探討數學素養的意涵；（2）建構數學素養能力指標；（3）初步探討與效化國小學生數學素養評量工具。

研究者	論文名稱	階段 範圍	研究內容
郭昇欣（2004）	國小六年級學童分數二階段評量診斷工具之發展研究	國小	研究旨在編製標準化之「分數二階段評量診斷測驗」，並進一步以此測驗工具調查臺南縣國小六年級學童分數概念的學習情況。
林珮君（2005）	概念圖合作學習對國中生數學學習成效之研究-以「一元一次方程式」單元為例	國中	探討概念圖合作學習對學生數學學習成效之影響，研究採「準實驗研究法」，以台南縣某國中一年級兩個班級共 76 名學生為研究對象，將兩班分為「概念圖合作學習教學實驗組」與「傳統教學法對照組」，每組再依數學三次段考成績平均值區分為高、中、低三群，進而探討概念圖合作學習對各群學生在數學學習成效之影響。使用的工具有：數學學習態度量表、概念圖學習歷程單、數學札記、數學學習成就測驗、數學概念二階段診斷評量、概念圖教學感受問卷。收集資料以統計程式進行處理分析。
楊淑雯（2005）	概念圖合作學習對國三學生數學學習成效之研究-以「與弧有關的角」為例	國三	探討概念圖合作學習方式對國中生數學的學習成就及學習態度之影響。研究採「準實驗研究法」。研究工具分別為概念圖學習歷程單、數學科成就測驗、二階段評量概念理解能力測驗、數學學習態度量表、概念圖教學感受問卷、訪談等，收集資料進行統計處理。
洪瑞盈（2006）	以網路評量系統進行診斷評量以實施補救教學之研究：以整數加減法單元為例	國中	利用一個網路診斷評量模組，稱為 DiAM-WATA，來診斷國中學生對於「整數加減法」單元的迷思概念，並據此實施補救教學後，評估學生的迷思概念，與對數學學習態度及數學焦慮的改變情形。本研究採用 Mayer（1987）的數學解題理論為主要架構，並以 DiAM-WATA 來診斷學生在數學解題時，其語文知識、事實知識、和基模知識的問題。並依此作為設計補救教學的依據。
梁惠晴（2006）	概念圖合作學習對高中生數學學習成效研究 - 以「排列組合」單元為例	高中	探討概念圖合作學習對學生數學學習成效（包含學習成就和學習態度）之影響。

目前關於二階段式診斷評量之三十三篇研究中，僅有李浩然（2002），採用分數乘除法運算二階段診斷評量試題與半結構式晤談，針對學生在分數乘除法運算錯誤類型情形進行調查，並整理、歸納出學生之錯誤類型，並同時藉由晤談進一步分析學生在分數乘除法運算錯誤之原因，與郭昇欣（2004），編製標準化之「分數二階段評量診斷測驗」，並進一步以此測驗工具調查臺南縣國小六年級學童分數概念的學習情況。除了以上二篇與數學領域「分數」主題有密切相關之外，另外三十一篇皆是與數學其他主題研究相關或與自然科學方面的研究相關。顯然，二階段式診斷評量在與數學領域「分數」主題相關之研究實在很少，值得提供研究者做深入思考並進行研究的一個面向。

肆、對本研究的啓示

由上述文獻可知，二段式診斷評量是建立在複合式選擇形式，由問題和聯想答案所組成。這聯想答案是由二部分或二段式組成，第一部份是由二或四個複合式選擇的回答選項組成，第二部份是由一組六個對於第一部份的回答，可能的理由所組成，這正確回答的理由組成是一個或更多個能去鑑定迷思概念，並且是清楚正確的理由。第二部分的發展是經由學生回答開放式問題或從晤談和文獻中得到。二段式診斷評量的優點有：

- 1.重視傳統的複合式選擇。
- 2.提供客觀存在的選項的好處，例如：快、容易，甚至要求機械分數，並節省回答的時間，它也不是依賴學生的寫作技巧。
- 3.它可能包含特別的迷思概念和提供既定學生人數詳細的迷思概念分布的比例。

基於上述內容，本研究擬將採取二段式診斷評量來進行國小分數運算之探究。

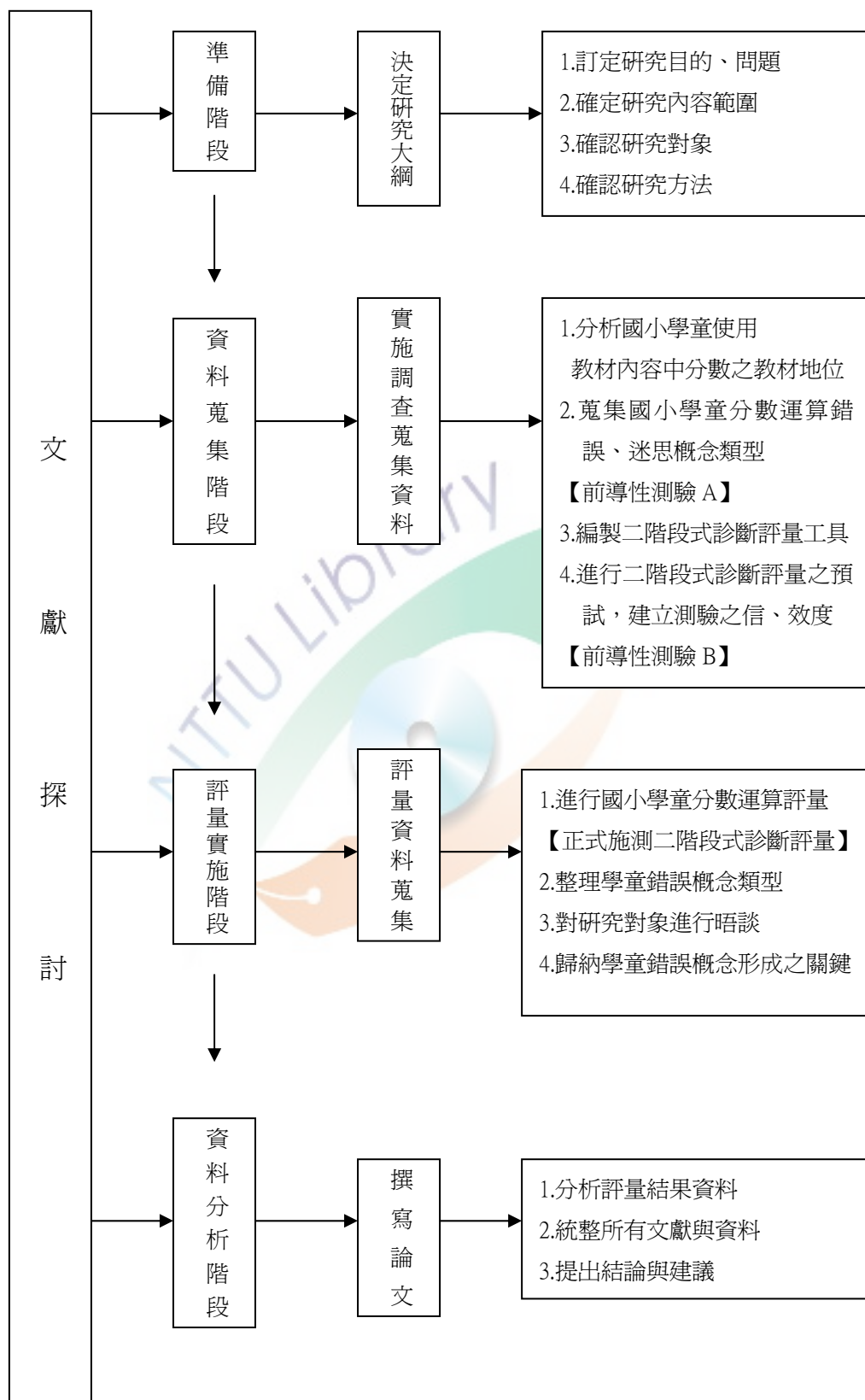
第三章 研究方法與步驟

本研究的目的，係建構國小學童分數之理論模式，並依據所建構的理論模式，發展二階段式分數運算診斷評量，以瞭解國小學童的分數運算發展狀況並分析其錯誤、迷思概念及類型。本章研究設計的目的，就是對分數理論基礎、研究模式架構、研究工具、受試對象、資料分析方法作詳細敘述與討論，將研究問題與理論的探討落實在研究的實踐活動中。

本章內容共分三節，第一節為研究流程及架構，第二節在說明研究對象及施測工具，第三節在說明資料處理與蒐集分析。

第一節 研究流程與架構

根據本研究之研究動機與目的、待答問題、相關文獻分析所得之結果，提出如下之研究流程及研究架構圖，並分別予以說明。



【圖 3-1-1】研究流程及架構圖

第二節 研究對象

本研究係以研究者所服務之縣內國小六年級學童為對象，本研究之相關研究對象詳細說明如下：

壹、預試測驗研究對象

一、前導性測驗 A

前導性測驗 A 測驗的目的，是希望從研究者編製的第一階段試題，學生的答題結果來編製第二階段試題，包含原因選項，並發展出正確的診斷資訊，藉由施測的過程瞭解測驗的表面效度，將題意不清的試題加以修改。進行預試測驗的研究對象，採取分層叢集隨機抽樣方式，以研究者所服務之縣內他校學童為對象，共計 100 人，採用開放性試卷並佐以訪談，以蒐集第一階段試題每個選項之所有可能想法。

二、前導性測驗 B

前導性測驗B測驗的施測目的是在於建立測驗之信、效度。因此，本階段之研究對象包含研究者所服務之縣內他校較具代表性國小學童，共計150人，做為測驗效度檢測，瞭解測驗對學童分數能力之區辨力。

貳、正式測驗研究對象

本研究正式測驗之研究對象，採取分層叢集隨機抽樣為研究者所服務之縣市五區之國小學童，共計200人。此施測結果，將作為診斷國小學童分數的學習障礙及迷思概念。抽樣樣本資料如下：

參、抽樣對象人數之說明

一、此研究要抽樣 200 人

(一) 全臺東縣六年級總人數：3089 人

表 3-2-1 全臺東縣六年級總人數

區域名稱	總人數（人）
台東市區	2014
關山區	446
成功區	380
大武區	249
全臺東縣六年級總人數：3089 人	

(二) 結果抽樣人數分配為下：

表 3-2-2 正式測驗區域人數分配

區域名稱	抽樣算式	抽樣分配人數
台東市區	$200 \text{ 人} \times \frac{2014}{3089} = 130.3981 \text{ 人}$	約 130 人
關山區	$200 \text{ 人} \times \frac{446}{3089} = 28.8766 \text{ 人}$	約 29 人
成功區	$200 \text{ 人} \times \frac{380}{3089} = 24.6034 \text{ 人}$	約 25 人
大武區	$200 \text{ 人} \times \frac{249}{3089} = 16.1217 \text{ 人}$	約 16 人

以上抽樣分配人數共為 200 人

二、研究對象學校及人數：

(一) 預試測驗研究對象：250 人

1.前導性測驗 A：100 人：

表 3-2-3 前導性測驗 A 人數

學校名稱	抽樣人數 (人)
A1 國小	70 人
A2 國小	30 人

2.前導性測驗 B：150 人：

表 3-2-4 前導性測驗 B 人數

學校名稱	總人數 (人)
B1 國小	150 人

(二) 正式測驗研究對象：200 人

表 3-2-5 正式測驗學校人數分配

區域名稱	學校名稱	抽樣人數 (人)
台東市區	C1	130 人
關山區	C2	11 人
	C3	18 人
成功區	C4	8 人
	C5	17 人
大武區	C6	16 人

第三節 研究工具

本研究所採用的工具包括以開放式的測驗試卷，藉以收集學生對分數的錯誤類型，經過整理之後，再編製成二階段式評量試卷。

一、開放式紙筆測驗試卷

本試卷是由研究者會同在教學上有豐富經驗的教師，對於學生在分數上可能產生的錯誤概念設計一份開放式的測驗試卷，其分數評量試題之概念分析結構表如表 3-3-1：

表 3-3-1 分數運算二階段評量試題之概念分析結構表

題號	答案	所對應之階段能力指標	所對應之 分年細目	評量目標
一	2E	N-1-09	2-n-10	用分數數詞來描述部分跟全體的分割關係。
二	4D	N-1-09	3-n-09	知道部分量跟全體量的關係，求全體量。
三	1D	N-1-09 S-1-05	3-n-09 3-s-06	同一的二維的基準量，不同的分割方式，合成其中幾份的量相等。(等積異形)
四	3F	N-2-07	4-n-07	能在連續量的情境中，進行相同單位量分子相同之分數的加法
五	4E	N-2-07	4-n-07	在離散量的情境中，單位分數內容為多個時，進行異分母同分子分數的加法。
六	1B	N-2-08	4-n-08	在連續量的情境中比較相同單位量異分母異分子分數的大小。
七	1F	N-2-08	4-n-08	在離散量的情境中進行異分母同分子分數的比較。
八	2C	N-2-07	4-n-07	能在離散量的情境中比較相同單位量同分母分數的大小。
九	3C	N-2-07	4-n-07	能在離散量的情境中進行同分母分數的加法。
十	1F	N-2-08	4-n-08	能在連續量的情境中進行同分母分數的加減法。
十一	2A	N-2-05	4-n-06	認識假分數的意義
十二	4C	N-2-07	4-n-07	假分數的加法
十三	3B	N-2-08	5-n-04	等值分數

十四	4B	N-2-09	5-n-05	能在連續量情境中，進行帶分數的加法
十五	1D	N-2-09	5-n-05	異分母分數的加減
十六	4D	N-2-11	5-n-07	帶分數乘以整數的乘法運算
十七	4E	N-2-11	5-n-07	假分數乘以假分數的乘法運算
十八	3D	N-2-11	5-n-07	能在離散量情境中，進行真分數乘以整數的運算
十九	3C	N-2-11	5-n-07	乘數是帶分數，積是整數的被乘數未知的問題
二十	1C	N-3-03	6-n-03	能在連續量的情境中，進行分數除以整數的運算
二十一	3C	N-3-11	5-n-07	被乘數未知，乘數為帶分數的乘法問題
二十二	4D	N-3-03	6-n-03	帶分數除以真分數，全部分完的包含除問題
二十三	1A	N-3-11 A-3-01	6-n-05	帶分數先減後加的兩步驟問題
二十四	4D	N-3-11 A-3-01	6-n-05	除數是分數，先除後乘的兩步驟問題
二十五	3F	N-3-11 A-3-01	6-n-05	除數是分數，先除後減的兩步驟問題
二十六	3C	N-3-11 A-3-01	6-n-05	分數先加後除的兩步驟問題

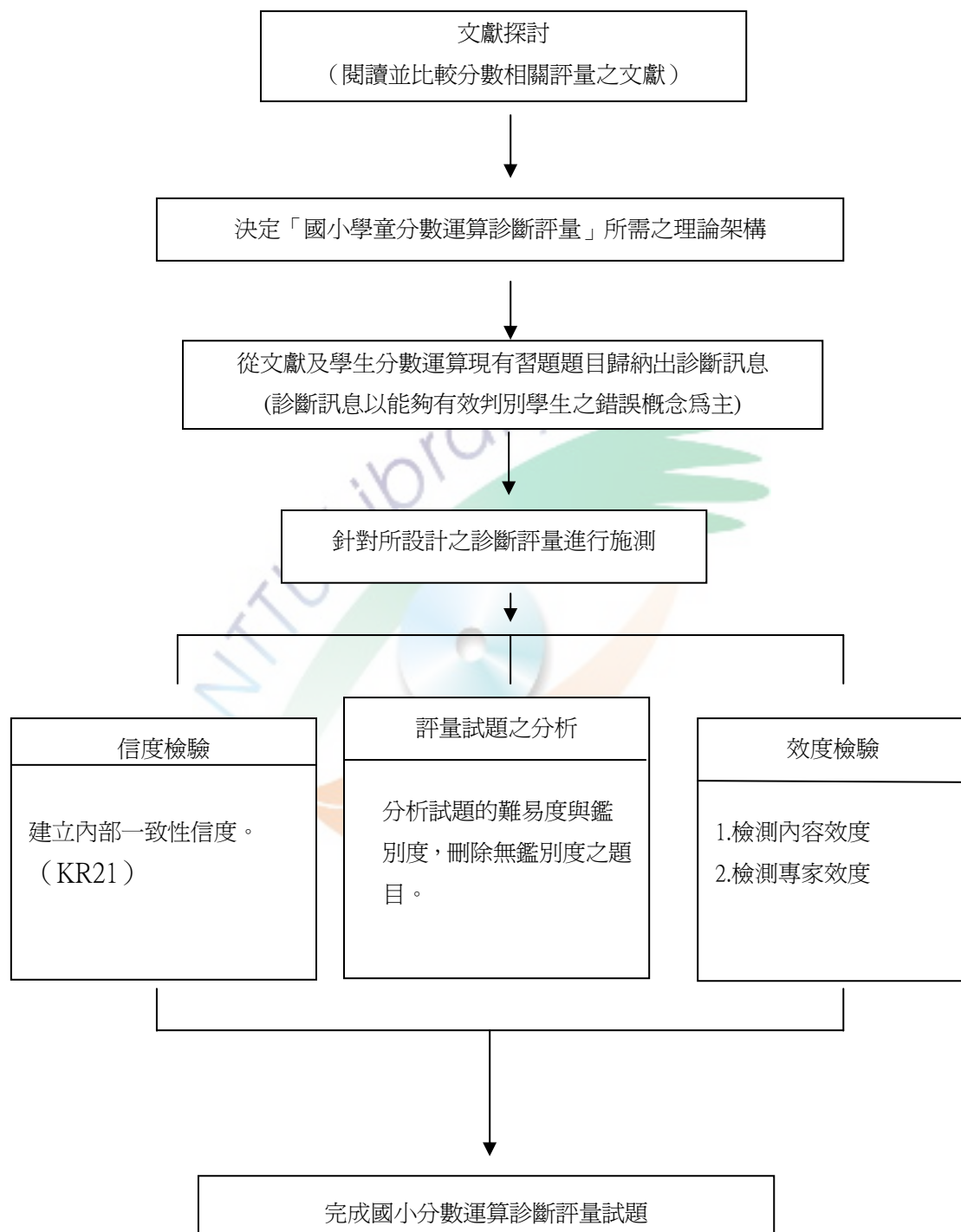
二、蒐集整理由開放式測驗試卷所獲知的錯誤類型

根據學生的作答並且透過晤談學生的想法，及所獲知的學生在分數上的錯誤類型，再依上述將試卷重新編寫成二階段式評量試卷，第一階段為答案選項，共有四個選項；第二階段為理由選項，共有六個選項。

三、對研究對象進行施測

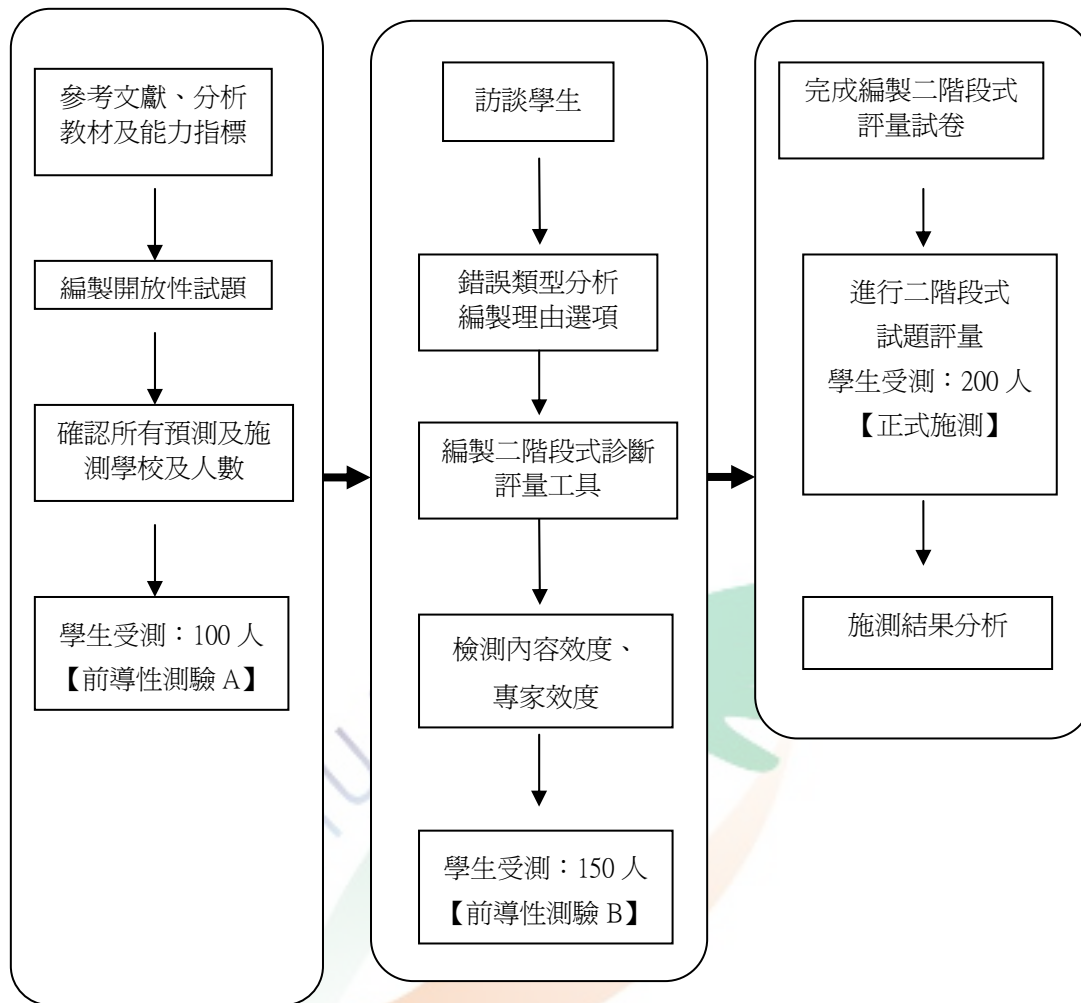
對研究對象進行二階段評量施測，從學生作答試卷中進行歸納整理並分析學生錯誤概念。

四、分數運算二階段式診斷評量試卷編製流程



【圖 3-3-1】分數運算二階段式診斷評量試卷編製流程圖

五、分數運算二階段式診斷評量施測流程



【圖 3-3-2】分數運算二階段式診斷評量施測流程圖

第四節 資料蒐集處理與分析

壹、資料的蒐集

本研究以學童「分數運算二階段式診斷評量」的表現作為了解學生錯誤概念及形成錯誤類型的依據。本研究進行之晤談，均採個別晤談方式，主要包含兩個方向：學生的解題想法以及學習經驗對形成錯誤概念的影響，實施過程如下：

一、評量結果分析

透過學生答題狀況進行學童分數運算學習內容主題分類整理

二、晤談

- 1.晤談目的：了解學生分數錯誤概念的關鍵點。
- 2.晤談時間：在學童做完「分數運算二階段式診斷評量」後，展開晤談。
- 3.對象選取：依照測驗成績將全班分成高分群、低分群兩組，每組挑選 1~2 人，共計約挑選 30 位學童生作為晤談對象。

貳、研究的信度與效度

一、研究的信度

信度所關心的是測驗分數的一致性或穩定性。一個具有良好信度的測驗，使用在不同的主試者、評分者、時間、情境或使用類似的問題，其所得的分數應該接近相同或一致，一般而言分數愈一致，受誤差的影響愈小，所以信度主要在說明測驗分數中測量誤差所佔的成分。研究者希望能藉此二階段診斷評量工具所獲得的分數，可以是很穩定可信的，再加上單一抽樣個體對象做此診斷評量僅施測一次，所以本研究擬採用克理氏法（Kuder-Richardson approaches）。計算KR21只需要三項資料：測驗的總題數、測驗分數的平均值（mean）及測驗分數的標準差（standard deviation）（楊孟麗、謝水南譯，2003）。KR21其形式如下：

$$KR21 = \frac{K}{K-1} \left[1 - \frac{M(K-M)}{K(SD^2)} \right]$$

其中K＝測驗的總題數，M＝測驗分數的平均值，SD＝測驗分數的標準差

二、研究的效度

在內容效度中，主要是一種邏輯分析的過程，仔細而有系統的檢查試題評量的內容，以確定是否能得到試題所欲獲得的資料。倘若測驗的效度高，則測驗能實現所欲測量的目的；如果效度低，不僅無法達成目標，甚至會提供不正確的資料而作成錯誤的決定。所以，研究者將在考驗效度時，請學者專家就試題內容逐題加以評量，由評量結果可以求得試題之內容效度。

參、資料的處理與分析

一、資料整理

本研究將所蒐集到的資料分別作量與質的分析。量的分析利用統計軟體 SPSS 10 進行分析，以呈現學童答題狀況，並利用評量後的訪談紀錄進行質的分析，以了解學生錯誤概念類型及錯誤概念形成之影響關鍵，作為教學的省思。

二、資料分析

本研究將蒐集到的資料，採用下列的統計分析方法進行分析：

（一）描述性統計

使用SPSS10.0 統計軟體將所欲分析觀察值之平均數、標準差等，描述性統計量列出，做為分析參考之依據。

（二）難度、鑑別度

本研究將根據受試者在測驗中的得分，由高到低進行排序。由得分最高的受試者往下數，選取總人數27%的受試者人數，當成高分組；再由得分最低的受試者往上數，一樣選取總人數27%的受試者人數，當成低分組。

1. 計算難度指標 (P)： $P = \frac{P_H + P_L}{2}$

高分組答對率 $P_H = \frac{\text{分數排名在前27\%答對人數}}{\text{總人數的27\%}}$

低分組答對率 $P_L = \frac{\text{分數排名在後27\%答對人數}}{\text{總人數的27\%}}$

其中 P_H 代表高分組通過某一題目的百分比， P_L 代表低分組通過某一題目的百分比。 P 值在0.8以上表示容易； P 值在0.4至0.8表示難易適中； P 值在0.4以下屬於較難的題目。換言之， P 值愈高表示題目愈簡單， P 值愈小表示題目愈困難。

2. 計算鑑別度 r ：

$$r = P_H - P_L$$

其中 P_H 代表高分組通過某一題目的百分比， P_L 代表低分組通過某一題目的百分比。 r 值在0.4以上表示鑑別度很好的題目； r 值在0.3至0.4之間表示具有中等鑑別度的題目； r 值在0.3以下是屬於較不好的題目。因此 r 數值愈高，代表某試題與測驗總分的作用之間愈一致，其鑑別功能愈強；反之，即代表某試題的作用與測驗總分的作用之間愈不一致，其鑑別功能愈弱。

三、本研究評量測驗結果：

（一）分數運算概念二階段式診斷評量試題的難度與鑑別度

表 3-4-1 分數運算概念二階段式診斷評量試題難度與鑑別度一覽表

題號	一階段 難易度	一階段 鑑別度	題號	兩階段 難易度	兩階段 鑑別度
----	------------	------------	----	------------	------------

1	0.71	0.30	1	0.69	0.30
2	0.69	0.30	2	0.58	0.34
3	0.80	0.30	3	0.78	0.30
4	0.75	0.30	4	0.61	0.30
5	0.79	0.30	5	0.69	0.30
6	0.76	0.30	6	0.76	0.30
7	0.80	0.30	7	0.70	0.30
8	0.91	0.30	8	0.82	0.30
9	0.78	0.30	9	0.71	0.30
10	0.62	0.34	10	0.58	0.37
11	0.68	0.31	11	0.68	0.31
12	0.79	0.30	12	0.79	0.30
13	0.61	0.30	13	0.61	0.30
14	0.74	0.30	14	0.74	0.30
15	0.65	0.33	15	0.65	0.33
16	0.58	0.39	16	0.58	0.39
17	0.56	0.41	17	0.56	0.41
18	0.56	0.41	18	0.56	0.41
19	0.76	0.30	19	0.59	0.30
20	0.56	0.30	20	0.56	0.30
21	0.60	0.30	21	0.59	0.30
22	0.70	0.30	22	0.70	0.30
23	0.65	0.33	23	0.63	0.33
24	0.74	0.30	24	0.67	0.30
25	0.79	0.30	25	0.66	0.30
26	0.40	0.37	26	0.40	0.37

(二) 試題的信度

$$\text{一階試題：KR21} = \frac{K}{K-1} \left[1 - \frac{M(K-M)}{K(SD^2)} \right] = \frac{27}{26} \left[1 - \frac{20.55(27-20.55)}{27(6.58^2)} \right] = 0.9207154$$

$$\text{兩階試題：KR21} = \frac{K}{K-1} \left[1 - \frac{M(K-M)}{K(SD^2)} \right] = \frac{27}{26} \left[1 - \frac{19.94(27-19.94)}{27(7.05^2)} \right] = 0.9295238$$

本測驗就一階試題而言，信度是 $0.92 > 0.70$ ，表示在一階段答案選項中測驗結果是穩定可信的；本測驗在兩階試題中的信度是 $0.93 > 0.70$ ，表示在兩階段答案及理由選項中測驗結果也是穩定可信的。

(二) 試題的效度

本測驗係根據國內外相關文獻並諮詢多位專家教師與學生常犯之錯誤意見，最後經指導教授的指證及修正才編製而成的；並將試題內容依據分數概念及運算主題分類，再依據評量向度編製雙向細目表如表3-4-2。因此此份測驗具有專家效度與內容效度。

表3-4-2 分數運算概念二階段式診斷評量正式施測試題之雙項細目表

題 內 容	向 度	概念理解	程序執行	問題解決
等分的概念		一、三	二	
分數的加法			四、五、十、 十二、十四	
分數的減法			十	
分數的加減法			十五、二十三	
分數的比較大小		六、七、八		
假分數的意義		十一		
等值分數				十三
分數的乘法			十六、十七、 十八	十九、二十一
分數的除法			二十、二十四	二十二、二十五 二十六

表3-4-3 參與試題審查專家一覽表

專家	任職單位及職稱	專業項目
專家 A	國立臺南教育大學數學系教授	國小數學教材教法、數學評量
專家 B	臺東縣豐榮國小主任、台東縣國教輔導團數學領域輔導員	國小高年級數學教學研究、數學評量
專家 C	臺東縣東海國小教師、台東縣國教輔導團數學領域輔導員	國小中年級數學教學研究、分數教學行動研究
專家 D	臺東縣東海國小教師、台東縣國教輔導團數學領域輔導員	國小低年級數學教學研究



第四章 研究結果與分析

第一節 國小六年級學童分數運算概念之學習表現

本節根據台東縣 6 所國小 9 個班級，一共 200 人施測的結果進行資料分析與比對，瞭解學童在各選項中之答題情形，並統計出各題作答時所呈現的概念人數比例。本研究以自行編製之分數運算二階段式診斷評量試卷，作為施測的工具。評量試題一共有二十六題，每一題都分為答案選項與理由選項兩部分，首先學生必須先依據題目要求算出答案，再根據問題解答選擇出正確的理由選項。以下就學童在各題所選出的答案和選出的理由之表現分佈情形進行說明。

壹、學童在分數運算二階段式診斷評量各題答題情形

表 4-1-1 學童在各題答題情形

題 號	第一階段 答案選項正確（人）		第二階段 理由選項正確（人）		第一階段答案選項 正確 而且 第二階段理由選項 正確（人）	
	人數	比例	人數	比例	人數	比例
第一題	164	0.82	162	0.81	162	0.81
第二題	141	0.71	130	0.65	129	0.65
第三題	172	0.86	168	0.84	167	0.84
第四題	172	0.86	156	0.78	153	0.77
第五題	176	0.88	163	0.82	163	0.82
第六題	167	0.84	169	0.85	167	0.84
第七題	172	0.86	155	0.78	154	0.77
第八題	190	0.95	182	0.91	180	0.90

題 號 \ 答對人數	第一階段 答案選項正確（人）		第二階段 理由選項正確（人）		第一階段答案選項 正確 而且 第二階段理由選項 正確（人）	
	人數	比例	人數	比例	人數	比例
第九題	161	0.81	154	0.77	154	0.77
第十題	141	0.71	140	0.70	137	0.69
第十一題	138	0.69	138	0.69	138	0.69
第十二題	177	0.89	177	0.89	177	0.89
第十三題	132	0.66	132	0.66	132	0.66
第十四題	169	0.85	170	0.85	169	0.85
第十五題	156	0.78	157	0.79	156	0.78
第十六題	156	0.78	156	0.78	156	0.78
第十七題	152	0.76	152	0.76	152	0.76
第十八題	154	0.77	154	0.77	154	0.77
第十九題	169	0.85	130	0.65	130	0.65
第二十題	120	0.60	120	0.60	120	0.60
第二十一題	123	0.62	123	0.62	123	0.62
第二十二題	147	0.74	147	0.74	145	0.73
第二十三題	160	0.80	158	0.79	157	0.79
第二十四題	154	0.77	143	0.72	143	0.72
第二十五題	148	0.74	134	0.67	132	0.66
第二十六題	100	0.50	100	0.50	100	0.50

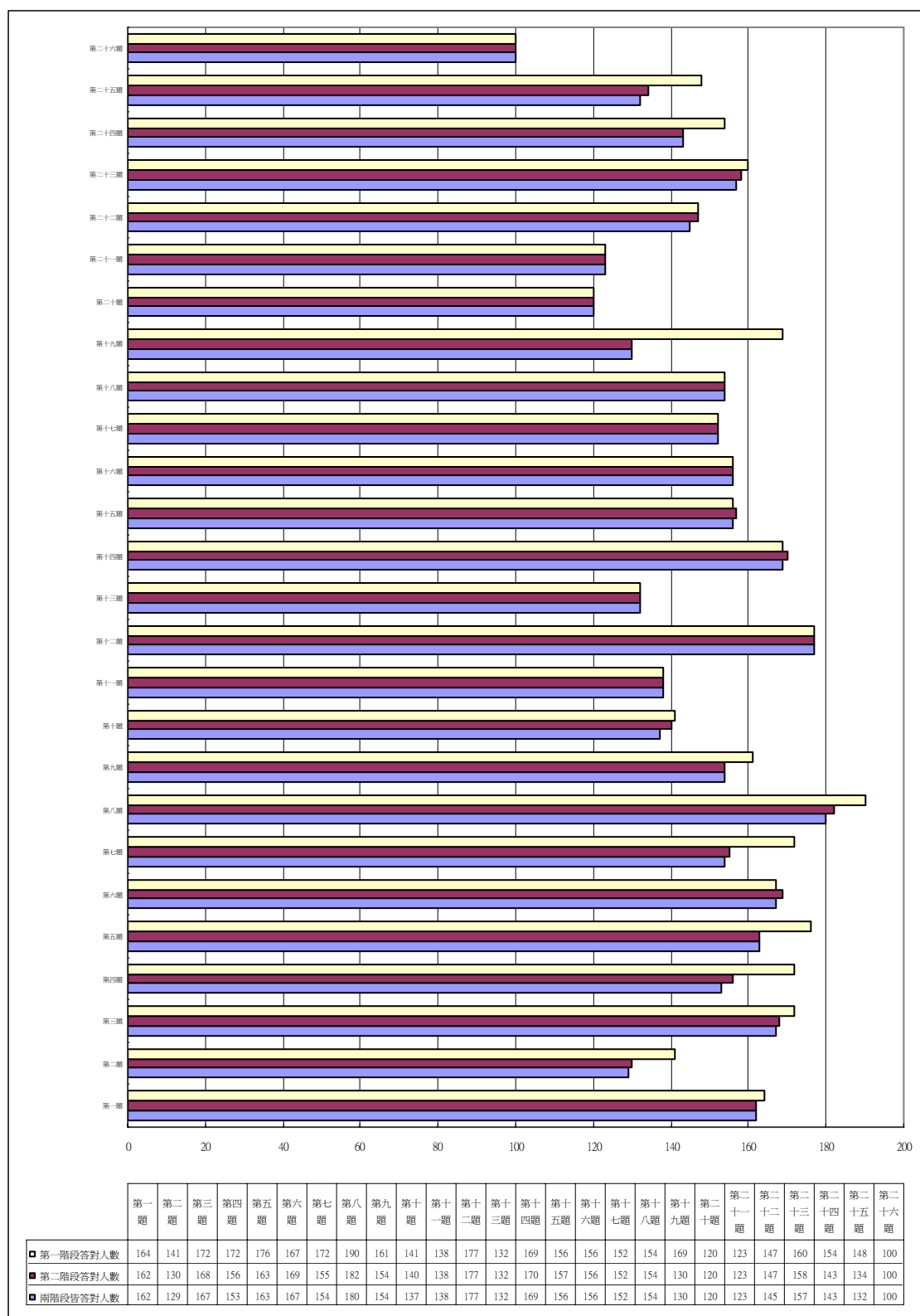


圖 4-1-1 學童在各題答題情形圖

由表 4-1-1 及圖 4-1-1 的結果中研究者發現：

（一）這一份試題得到六年級學童的平均答對率為.7，大部分題目的答對率都介於.50～.80 之間。

（二）經由第一階段答案選項要求學生選擇出對於題目內容最適當的答案，接著進一步藉由第二段的測試，可以運用理由選項的誘答過程將不會此一概念的學童篩選出來，所以從表 4-1-1 的數據我們清楚發現第二階段答對率都不會高於第一階段答對率。在圖 4-1-1 中顯然發現，第一階段答案選項正確同時第二階段理由選項也正確的人數比例更低。

（三）從答題結果表 4-1-1 的數據也得知，六年級學童在前十四題的平均答對率勝過後十三題的平均答對率，研究者相較之下發現六年級學童在加減法試題上表現優於在分數的乘除法試題上的表現。

貳、學生在個別題目的答題結果

一、試題分析說明：

我們可以依據學生在正式施測所得到的結果，加以整理之後，可以統計出學生在分數運算概念各題中每一個選項選答的結果。透過答題結果的分析，可以提供教師教學時的參考。

（一）答題表現：此部份將學童的選答情形作量化的呈現

1.橫向說明：可分為答案選項 1、2、3、4、總和與填答選擇情形。

2.縱向說明：可分為理由選項 A、B、C、D、E、F、總和與填答選擇情形。

（二）答題結果分析說明：逐題將題目類型與評量目標加以說明，同時針對學童的答題情形之量化數據，進行初步的分析和說明。

二、答題表現分析

(一) 第一題分析

1 答題結果

表 4-1-2 學童在第一題答題結果

一理 * 一答 交叉表

個數		一答				總和
		1	2*	3	4	
一理	A	14	0	0	0	14
	B	0	2	8	0	10
	C	0	0	0	9	9
	D	0	0	0	5	5
	E*	0	162	0	0	162
總和		14	164	8	14	200

2.答題結果說明

此題是對於學童在分數運算概念中用分數數詞來描述部分跟全體的分割關係的學習，診斷學生在這種類型易發生的錯誤。該題的正確答案是 2E，有 162 位學童答對，佔全體學童人數之 81%。其中學生容易犯的錯誤是 1A，有 14 位學童選擇這個選項：學童透過直觀誤以 $\frac{3}{5}$ 為全部。其次，有 10 位學童選擇理由 2B 或 3B：

1 等份加上 1 等份合起來等於 1 塊布。再者，有 9 位學童選擇 4C： $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ ，所以是 2 塊布。有 5 位學童選擇 4D：斜線部分是全部的其中 2 等份，也就是 2 塊布。

(二) 第二題分析

1.答題結果

表 4-1-3 學童在第二題答題結果交叉表

二理 * 二答 交叉表

個數		二答				總和
		1	2	3	4*	
二理	A	0	0	51	1	52
	C	0	1	0	0	1
	D*	1	0	0	129	130
	E	6	0	0	0	6
	F	0	0	0	11	11
總和		7	1	51	141	200

2.答題結果說明

此題是評量學童在部分量跟全體量的關係，求全體量的表現情形。該題的正確答案是 4D，有 129 位學童答對，佔全體學童人數之 64.5%。其中學童容易犯的錯誤是 3A，有 51 位學童選擇這個選項：5 張中的其中 1 張是全部的 $\frac{1}{5}$ ，所以全部是 5 張；學童直觀將 5 張愛心卡視為全部愛心卡之數量。其次有 11 位學童選擇 4F：一張愛心卡數量的 25 倍是 25 張愛心卡，所以全部是 25 張。再者，有 6 位學童選擇 1E：一張愛心卡是全部愛心卡數量的 5 倍，所以全部是 $\frac{1}{5}$ 張。有 1 位學童選擇 2C：圖中愛心卡數量原本有全部的 $\frac{1}{5}$ ，所以愛心卡是 5 張的 $\frac{1}{5}$ 倍，所以全部是 1 張。此外，有 1 位學童選擇 1D，這一位學童雖然選擇了對的理由選項，不過卻選擇了錯誤的答案選項，所以並不代表此學童具有正確的概念。

(三) 第三題分析

1.第三題答題結果

表 4-1-4 學童在第三題答題結果交叉表
三理 * 三答 交叉表

個數		三答				總和
		1*	2	3	4	
三理	A	0	9	0	0	9
	B	4	0	5	0	9
	C	1	0	0	3	4
	D*	167	0	1	0	168
	E	0	0	3	0	3
	F	0	7	0	0	7
總和		172	16	9	3	200

2.答題結果說明

此題是評量學童在同一的二維的基準量，不同的分割方式，合成其中幾份的量相等（等積異形）的表現情形。該題的正確答案是 1D，有 167 位學童答對，佔全體學童人數之 83%。其中學童容易犯的錯誤是 2A 和 1B，有 18 位學童選擇 2A

或 1B：2A：誤以 2 等份的三角形蛋糕合起來會等於小花吃的著色部分蛋糕；1B：儘管題目已是同樣的蛋糕平分成 8 等份，但學童仍以直觀判斷蛋糕的大小，顯然是學童沒有等份概念。有 7 位學童選擇 2F：誤以巧虎吃 2 等份的蛋糕會大於小花吃 1 等份的蛋糕。有 4 位學童選擇 1C 或 4C：巧虎吃的是切成三角形的蛋糕，小花吃的是切成長方形的蛋糕，儘管題目已告知平分成 8 等份，但學童仍是認為三角形和長方形無法比較大小。有 3 位學童選擇 3E，誤以為小花吃 1 等份的長方形蛋糕等於吃 2 等份的三角形蛋糕。此外，有 1 位學童選擇 3D，這一位學童雖然選擇了對的理由選項，不過卻選擇了錯誤的答案選項；有 5 位學童分別選擇了 1B、1C，雖然他們選對了答案選項，可是卻選擇了錯誤的理由選項，所以並不代表這些學童具有正確的概念。

（四）第四題分析

1. 答題結果

表 4-1-5 學童在第四題答題結果交叉表

四理 * 四答 交叉表

個數		四答				總和
		1	2	3*	4	
四理	A	0	7	0	0	7
	B	0	0	19	0	19
	C	0	0	0	1	1
	D	15	0	0	0	15
	E	0	0	0	2	2
	F*	2	1	153	0	156
總和		17	8	172	3	200

2. 答題結果說明

此題是評量學童能在連續量的情境中，進行相同單位量分子相同之分數的加法的表現情形。該題的正確答案是 3F，有 153 位學童答對，佔全體學童人數之 72%。其中學童常犯的錯誤是 3B，有 19 位學童選擇了 3B：通分後沒有將分母改為通分

後的分母。雖然他們選對了答案選項，可是卻選擇了錯誤的理由選項，所以並不代表這些學童具有正確的概念。有 15 位學童選擇 1D：分母通分忽略分子使得，使得分子不變就直接相加 $\frac{4}{5} + \frac{4}{10} = \frac{4+4}{10} = \frac{8}{10}$ 條；有 7 位學童選擇 2A：異分母分數加法誤以分母加分母，分子加分子；有 2 位學童選擇了 4E： $\frac{4}{5}$ 條繩子和 $\frac{4}{10}$ 條繩子合起來就是 1 條繩子；有 1 位學童選擇了 4C： $\frac{4}{5} + \frac{4}{10} = \frac{8}{10} + \frac{2}{5} = \frac{10}{10} = 1$ 條。此外，有 3 位學童分別選擇了 1F、1F，雖然他們選對了答案選項，可是卻選擇了錯誤的理由選項，所以並不代表這些學童具有正確的概念。

（五）第五題分析

1. 答題結果

表 4-1-6 學童在第五題答題結果交叉表

個數		五答				總和
		1	2	3	4*	
五理	A	0	0	14	1	15
	B	0	1	0	11	12
	C	0	0	1	0	1
	D	2	0	0	1	3
	E*	0	0	0	163	163
	F	0	6	0	0	6
總和		2	7	15	176	200

2. 答題結果說明

此題是評量學童能在離散量的情境中，單位分數內容為多個時，進行異分母同分子分數的加法的表現情形。該題的正確答案是 4E，有 163 位學生答對，佔全體學童人數之 81.5%。其中有 13 位學童分別選擇了 4A、4B 及 4D，雖然他們選擇了對的答案選項，不過卻選擇了錯誤的理由選項，所以並不代表這些學童具有正確的概念。在這一題中，學童常犯的錯誤是 3A，有 14 位學童選擇了這一個選項，

這些學童犯了通分後沒有將分母改為通分後分母的錯誤。有 2 位學童選擇了 1D：分母通分忽略分子,使得分子不變就直接相加；有 1 位學童選擇了 3C：異分母分數加法誤以分母加分母，分子加分子；有 6 位學童選擇了 6F： $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{12}$ ，犯了通分之後，分母直接相加的錯誤。

（六）第六題分析

1.答題結果

表 4-1-7 學童在第六題答題結果交叉表

六理 * 六答 交叉表					
個數		六答			總和
		1*	2	3	
六理	A	0	0	2	2
	B*	167	0	0	167
	C	0	0	17	17
	E	0	0	10	10
	F	0	4	0	4
總和		167	4	29	200

2.答題結果說明

此題是評量學童能在連續量的情境中比較相同單位量異分母異分子分數的大小之表現情形。該題的正確答案是 1B，有 167 位學童答對，佔全體學童人數之 83 %。其中學生常犯的錯誤是 3C，有 17 位學童選擇了這一個錯誤理由選項，她們是誤認為分母及分子越大,則分數值越大。有 10 位學童選擇了 3E： $\frac{8}{20} - \frac{4}{10} = \frac{4}{10}$ ， $\frac{8}{20} > \frac{4}{10}$ ，所以巧虎吃得多。這個選項的錯誤是異分母相減時，直接將分母減分母，將分子減分子，並沒有通分過程。還有 4 位學童選擇了 2F： $\frac{4}{10} - \frac{8}{20} = \frac{4 \times 8}{10 \times 2} - \frac{8}{20} = \frac{24}{20}$ ，誤以為 $\frac{4}{10} > \frac{8}{20}$ ；我們可以發現錯誤在 $\frac{4}{10}$ 與 $\frac{8}{20}$ 通分時，分母乘以 2 但分

子卻乘以 8。另外，也有 2 位學童選擇了 3A： $\frac{8}{20} - \frac{4}{10} = \frac{8}{20} - \frac{4}{20} = \frac{8-4}{20} = \frac{4}{20}$ ，在異分母相減過程中，分母通分但分子未處理。

（七）第七題分析

1. 答題結果

表 4-1-8 學童在第七題答題結果交叉表

七理 * 七答 交叉表

個數		七答			總和
		1*	2	3	
七理	A	0	17	0	17
	C	3	0	0	3
	D	15	0	0	15
	E	0	0	10	10
	F*	154	1	0	155
總和		172	18	10	200

2. 答題結果說明

此題是評量學童在離散量的情境中進行異分母同分子分數的比較之表現情形。該題的正確答案是 1F，有 154 位學童答對，佔全體總人數之 77%。值得一提的是有 1 位學童選擇了 2F 的選項，他雖然選擇了對了理由選項，不過卻選擇了錯誤的理由選項；另外，有 18 位學童分別選擇了 1C： $\frac{2}{5} \times 5 = \frac{2}{1} = \frac{6}{3}$ ， $\frac{2}{15} \times 5 = \frac{1}{3}$ ，和 1D： $\frac{2}{5} \times 3 = \frac{6}{15}$ 分數乘以整數時，誤將分子及分母都同時乘上一整數。這些學童選擇了正確的答案選項，但卻選擇了錯誤的理由選項。因此，以上 19 位學童並不代表具有正確的概念。在這一題中，學生常犯的錯誤是 2A，有 17 人選擇了這一個選項：異分母分數比較，誤以分母較大，別分數值較大。有 10 位學童，選擇了 3E 這一個選項，在異分母相減的過程中，錯以分子減分子，分母減分母。

(八) 第八題分析

1.第八題答題結果

表 4-1-9 學童在第八題答題結果交叉表

八理 * 八答 交叉表

個數		八答			總和
		2*	3	4	
八理	B	1	7	0	8
	C*	180	2	0	182
	E	9	0	0	9
	F	0	0	1	1
總和		190	9	1	200

2.答題結果說明

此題是評量學童能在離散量的情境中比較相同單位量同分母分數的大小之表現情形。該題的正確答案是 2C，有 180 位學童答對，佔全體學童人數之 90%。其中有 10 位學童，分別選擇了 2B 和 2E，他們雖然選擇了正確的答案選項，不過卻選擇了錯誤的理由選項；另外，有 2 位學童選擇了 3C 的選項，雖然選擇了正確的理由選項，但卻選擇了錯誤的答案選項。所以，以上 12 學童並不代表具有正確的概念。在這一題中，學童常犯的錯誤是 3B，有 7 位學童選擇了這一個錯誤選項，錯誤是在於同分母分數減法誤以分母減分母，分子減分子處理。

(九) 第九題分析

1.第九題答題結果

表 4-1-10 學童在第九題答題結果交叉表

九理 * 九答 交叉表

個數		九答				總和
		1	2	3*	4	
九理	A	0	0	7	0	7
	B	4	1	0	26	31
	C*	0	0	154	0	154
	D	0	0	0	2	2
	E	2	1	0	0	3
	F	0	3	0	0	3
總和		6	5	161	28	200

2.答題結果說明

此題是評量學童能在離散量的情境中進行同分母分數的加法之表現情形。該題的正確答案是 3C，有 154 位學童答對，佔全體學童人數之 77%。有 7 位學童選擇了正確的答案選項，不過，他們卻選擇了錯誤的理由選項，所以，以上 7 學童並不代表具有正確的概念。在這一題中，有 31 位學童選擇了 B 的理由選項，學生常犯的錯誤是 4B： $\frac{4}{6} \times 2 = 8$ ， $\frac{5}{6} \times 2 = 10$ ，分數乘以整數，忽略分母。有 3 位學童選擇了 E 的理由選項： $\frac{4}{6} \times 2 = \frac{8}{12}$ ， $\frac{5}{6} \times 2 = \frac{10}{12}$ ，在分數乘以整數的乘法中，分子及分母都同時乘以一個整數，顯然將通分法則過度類化到分數乘法算則。

(十) 第十題分析

1.第十題答題結果

表 4-1-11 學童在第十題答題結果交叉表

十理 * 十答 交叉表

個數		十答				總和
		1*	2	3	4	
十理	A	0	0	3	0	3
	B	0	36	0	0	36
	C	4	0	0	0	4
	D	0	11	0	2	13
	E	0	0	0	4	4
	F*	137	3	0	0	140
總和		141	50	3	6	200

2.答題結果說明

此題是評量學生能在連續量的情境中進行同分母分數的加減法之表現情形。該題的正確答案是 1F，有 137 位學童答對，佔全體學童人數之 68.5%。有 4 位學童選擇了 1C，雖然是選對了正確的答案選項，但卻錯選了理由選項；有 3 位學童選擇了 2F 的選項，雖然他們選擇了正確的理由選項，然而選擇了錯誤的答案選項，

所以這 7 位學童並不具有正確的概念。在這一題當中，學童常犯的錯誤是 2B： $\frac{6}{18} - \frac{3}{9} = \frac{3}{9}$ ，有 36 位學童選擇了這一個選項，錯誤在於分數減法直接以分母減分母，分母減分母。

（十一）第十一題分析

1. 第十一題答題結果

表 4-1-12 學童在第十一題答題結果交叉表

個數		十一答				總和
		1	2*	3	4	
十一理	A*	0	138	0	0	138
	B	0	0	20	0	20
	D	0	0	0	39	39
	E	0	0	1	0	1
	F	2	0	0	0	2
	總和	2	138	21	39	200

2. 答題結果說明

此題是評量學生能認識假分數的意義之表現情形。該題的正確答案是 2A，有 138 位學童答對，佔全體學童人數之 69%。其中學生常犯的錯誤是 4D：有 5 位學童選擇了這一個選項：分子大於分母但分子不等於分母的分數；有 20 位學童選擇了 3B：誤以為只有分子大於分母的分數，卻忽略了分子等於分母的分數；有 2 位學童選擇了 1F：分子不等於分母的分數。在假分數的定義中，有 41 位學童對於分子等於分母是假分數這一個概念是模糊不清的。

（十二）第十二題分析

1.第十二題答題結果

表 4-1-13 學童在第十二題答題結果交叉表

十二理 * 十二答 交叉表						
個數		十二答				總和
		1	2	3	4*	
十二理	A	1	3	0	0	4
	B	7	0	0	0	7
	C*	0	0	0	177	177
	D	0	4	0	0	4
	F	0	0	8	0	8
總和		8	7	8	177	200

2.答題結果說明

此題是評量學生假分數的加法之表現情形。該題的正確答案是 4C，有 177 位學童答對，佔全體學童人數之 88.5%，其中學生常犯的錯誤是 3F，有 16 位學童都犯了類似同樣的錯誤， $\frac{5}{4} + \frac{23}{4} = \frac{28}{4} = 2\frac{8}{4}$ ，假分數化成帶分數，誤以分子的十位數字為整數。

（十三）第十三題分析

1.第十三題答題結果

表 4-1-14 學童在第十三題答題結果交叉表

十三理 * 十三答 交叉表						
個數		十三答				總和
		1	2	3*	4	
十三理	A	0	0	0	1	1
	B*	0	0	132	0	132
	C	16	0	0	0	16
	D	0	0	0	11	11
	E	0	40	0	0	40
總和		16	40	132	12	200

2.答題結果分析

此題是評量學童等值分數之表現情形。該題的正確答案是 3B，有 132 位學童答對佔全體學童人數之 66%。有 40 位學童選擇了 2E，這是學童常犯的錯誤：當分割份數少時以直觀判斷，但針對分割份數多或不同分割份數時，就無法掌握分數值的範圍，即等值分數概念不完備。

（十四）第十四題分析

1.第十四題答題結果

表 4-1-15 學童在第十四題答題結果交叉表

個數		十四答				總和
		1	2	3	4*	
十四理	A	0	0	5	0	5
	B*	0	1	0	169	170
	C	0	14	0	0	14
	D	0	2	0	0	2
	E	2	0	4	0	6
	F	0	3	0	0	3
總和		2	20	9	169	200

2.答題結果說明

此題是評量學生能在連續量情境中，進行帶分數的加法之表現情形。該題的正確答案是 4B，有 169 位學童答對，佔全體學童人數之 84.5%。有 1 位學童選擇了 2B，雖然他選擇正確的理由選項，但是卻選擇了錯誤的答案選項，所以這 1 位學童並不具有正確的概念。其中學生常犯的錯誤是 2C，有 14 位學童選擇了選項：

$2\frac{1}{4} + 1\frac{2}{3} = (2+1) + (1+2) + (4+3) = 3\frac{3}{4}$ ，帶分數加法運算過程忽視分數的意義，所有數字皆以整數加法處理。

（十五）第十五題分析

1.第十五題答題結果

表 4-1-16 學童在第十五題答題結果交叉表

十五理 * 十五答 交叉表

個數		十五答				總和
		1*	2	3	4	
十五理	A	0	2	0	0	2
	B	0	0	0	1	1
	C	0	1	7	0	8
	D*	156	1	0	0	157
	E	0	0	0	30	30
	F	0	2	0	0	2
總和		156	6	7	31	200

2.答題結果說明

此題是評量學生在異分母分數的加減之表現情形。該題的正確答案是 1D，有 156 位學童答對，佔全體學童總人數之 78%，有 1 位學童選擇了 2D，雖然是選擇了正確的理由選項，不過卻選擇了錯誤的答案選項，所以這 1 位學童並不算有正確的概念。在這一題裡，學童常犯的錯誤是 4E，有 30 位學童選擇了這一個選項： $2\frac{1}{4} - 1\frac{2}{15} + \frac{1}{12} = 2\frac{1}{60} - 1\frac{2}{60} + \frac{1}{60}$ ，在通分過程中，忽略分子要與分母同乘一整數，而使分子未加以處理就直接相加。有 8 位學童選擇了理由選項 C： $2\frac{1}{4} - 1\frac{2}{15} + \frac{1}{12} = 1\frac{2}{23}$ ，對於異分母帶分數的加減並沒有先通分，則是直接做整數與整數、分母與分母、以及分子與分子的加減。

(十六) 第十六題分析

1.第十六題答題結果

表 4-1-17 學童在第十六題答題結果交叉表

十六理 * 十六答 交叉表

個數		十六答				總和
		1	2	3	4*	
十六理	B	0	14	0	0	14
	C	0	0	11	0	11
	D*	0	0	0	156	156
	E	0	5	0	0	5
	F	14	0	0	0	14
總和		14	19	11	156	200

2.答題結果說明

此題是評量學生在帶分數乘以整數的乘法運算之表現情形。該題的正確答案是 4D，有 156 位學童答對，佔全學童人數之 78%，其中學生常犯的錯誤是 2B，有 14 位學童選擇了這一個選項：分配率的誤用 $1\frac{3}{5} \times 7 = 1 \times 7 + \frac{3}{5} \times 7$ ；有 14 位學童選擇了 1F：以通分算則處理分數乘法問題 $1\frac{3}{5} \times 7 = \frac{8}{5} \times 7 = \frac{8 \times 7}{5 \times 7}$ ；有 11 位學童選擇了 3C： $1\frac{3}{5} \times 7 = 1 \times 7 + 1\frac{3}{5} = 7 + 1\frac{3}{5} = 8\frac{3}{5}$ ；還有 5 位學童選擇了 2E： $1\frac{3}{5} \times 7 = 1 \times 7 + \frac{3}{5} = 7 + \frac{3}{5} = 7\frac{3}{5}$ 。

(十七) 第十七題分析

1.第十七題答題結果

表 4-1-18 學童在第十七題答題結果交叉表

十七理 * 十七答 交叉表

個數		十七答				總和
		1	2	3	4*	
十七理	A	0	0	2	0	2
	B	0	0	1	0	1
	C	14	0	0	0	14
	D	14	0	0	0	14
	E*	0	0	0	152	152
	F	0	17	0	0	17
總和		28	17	3	152	200

2.答題結果說明

此題是評量學生在假分數乘以假分數的乘法運算之表現情形。該題的正確答案是 4E，有 152 位學童答對，佔全體學童人數之 76%，其中學生常犯的錯誤是 2F，

有十七位學童選擇了這一個選項： $\frac{21}{6} \times \frac{18}{7} = \frac{7}{2} \times \frac{18}{7} = \frac{7}{2} \times \frac{7}{18} = \frac{49}{36} = 1\frac{13}{36}$ 平方公

尺，第三步驟誤將乘數寫成倒數，學童在分數乘法算則與分數除法算則混淆使用。

有 14 位學童分別選擇了選項 C： $\frac{21}{6} \times \frac{18}{7} = \frac{21}{42} \times \frac{18}{42}$ ，誤將分數通分但分子未處理

的方式來做分數乘法。有 14 位學童分別選擇了選項 D： $\frac{21}{6} \times \frac{18}{7} = \frac{(21+18)}{42}$ ，誤將

分數乘法以分數除法來處理，乘上乘數的倒數。

(十八) 第十八題分析

1.第十八題答題結果

表 4-1-19 學童在第十八題答題結果交叉表

十八理 * 十八答 交叉表

個數	十八答				總和
	1	2	3*	4	
十八理 A	14	0	0	0	14
B	0	14	0	0	14
D*	0	0	154	0	154
E	0	0	0	18	18
總和	14	14	154	18	200

2.答題結果說明

此題是評量學生能在離散量情境中，進行真分數乘以整數的運算之表現情形。該題的正確答案是 3D，有 154 位學童答對，佔全體學童人數之 77%，其中學生常犯的錯誤是 5E，有 18 人選擇了這一個選項： $\frac{3}{5} \times 20 = 20 \div \frac{3}{5}$ 分數乘以整數誤以整數除以分數來計算，學童出未瞭解題意。有 14 位學童選擇了 1A： $\frac{3}{5} \times 20 = \frac{60}{100}$ 公分，分數乘以整數時，把分子乘上了 20，也同時把分母乘上了 20。另外，有 14 位學童選擇了 2B： $\frac{3}{5} \times 20 = \frac{3}{5} \times \frac{20}{5}$ ，分數乘以整數時，誤把乘數 20 寫成了與被乘數同分母的 $\frac{20}{5}$ 。

(十九) 第十九題分析

1. 第十九題答題結果

表 4-1-20 學童在第十九題答題結果交叉表

十九理 * 十九答 交叉表

個數		十九答				總和
		1	2	3*	4	
十九理	A	7	0	0	0	7
	B	0	9	0	0	9
	C	0	0	39	0	39
	D	0	0	0	10	10
	E	0	0	0	5	5
	F*	0	0	130	0	130
總和		7	9	169	15	200

2. 答題結果說明

此題是評量學生在乘數是帶分數，積是整數的被乘數未知的問題之表現情形。該題的正確答案是 3F，有 130 位學童答對，佔全體學童人數之 65%，其中學生常犯的錯誤是 3C： $\square \times 3\frac{1}{4} = 52$ ， $\square = 52 \div 3\frac{1}{4} = 52 \times 3\frac{1}{4}$ ，分數的除法，誤將除號直接換寫成乘號，而且之後再以分數除法算則來解題。有 39 位學童選擇了 3C，雖然這些學童選擇了正確的答案選項，但是他們卻選擇了錯誤的理由選項，所以這些學童並不算有正確的概念。有 10 位學童選擇了 4D： $\square \times 3\frac{1}{4} = 52$ ， $\square = 52 \div 3\frac{1}{4} = 52 \div 4 \times 3$ ，對於分數除法的概念不清。有 9 位學童選擇了 2B： $\square \times 3\frac{1}{4} = 52$ ， $\square = 52 \div 3\frac{1}{4} = \frac{52}{1} \div \frac{1}{4}$ ，在分數除法除數是帶分數時，忽略了整數的部份。有 7 為學童選擇了 1A： $\square \times 3\frac{1}{4} = 52$ ， $\square = 52 \div 3\frac{1}{4} = 52 \div (3 \times 4 + 1)$ ，在分數除法中，除數是帶分數時，誤將代分數部份全部拆解成整數來處理。

（二十）第二十題分析

1.第二十題答題結果

表 4-1-21 學童在第二十題答題結果交叉表

二十理 * 二十答 交叉表

個數		二十答				總和
		1*	2	3	4	
二十理	A	0	2	0	0	2
	B	0	0	1	43	44
	C*	120	0	0	0	120
	E	0	1	0	0	1
	F	0	0	33	0	33
總和		120	3	34	43	200

2.答題結果說明

此題是評量學童能在連續量的情境中，進行分數除以整數的運算之表現情形。該題的正確答案是 1C，有 120 的學童答對，佔全體學童人數之 60%，其中學生常犯的錯誤是 4B，有 44 位學童選擇了 B 選項： $\frac{5}{6} \div 7 = \frac{6}{5} \times 7$ ，誤將分數除法中的被除數寫成倒數，且直接將除號改成乘號除數未處理。有 33 位學童選擇了 3F： $\frac{5}{6} \div 7 = \frac{35}{6} = 5\frac{5}{6}$ 公升，直接把除數 7 乘上被除數的分子 5，誤將分數除法與分數乘法混淆使用。有 2 位學童選擇了 2A： $\frac{5}{6} \times 7 = \frac{5 \times 7}{6 \times 7} = \frac{35}{42}$ 公升，分數乘以整數時，除了分子本來就應該乘以 7 之外，誤將分母也乘以 7。還有 1 位學童選擇了 2E 這一個選項： $\frac{5}{6} \div 7 = \frac{35}{6}$ ，在分數除以整數時，並沒有把除數先寫成倒數相乘，反倒是直接乘以分子，與分數乘法混淆使用。

(二十一) 第二十一題分析

1.第二十一題答題結果

表 4-1-22 學童在第二十一題答題結果交叉表

二十一理 * 二十一答 交叉表

個數		二十一答			總和
		1	3*	4	
二十一理	A	0	0	2	2
	C*	0	123	0	123
	D	42	0	0	42
	E	0	0	33	33
總和		42	123	35	200

2.答題結果說明

此題是評量學生在被乘數未知，乘數為帶分數的乘法問題之表現情形。該題的正確答案是 3C，有 123 位學童答對，佔全體學童人數之 62.5%，其中學生常犯的錯誤是 1D，有 42 位學童選擇了這一個選項： $9 \times \frac{9}{2} = \frac{1}{9} \times \frac{9}{2}$ ，誤將被乘數寫成倒數。有 33 位學童選擇了 4E： $\text{甲} \times 4\frac{1}{2} = 9$ ， $\text{甲} = 9 \div 4\frac{1}{2} = 9 \div \frac{9}{2} = 9 \times \frac{2}{9} = \frac{81}{2} = 40\frac{1}{2}$ ，在分數除法運算過程中，並沒有將除數寫成倒數相乘。有 2 位學童選擇了 4A：

因為 $\text{甲} \times 4\frac{1}{2} = 9$ ，所以誤將 $\text{甲} = 9 \times 4\frac{1}{2}$ ，未將乘號改寫成除號。

(二十二) 第二十二題分析

1.第二十二題答題結果

表 4-1-23 學童在第二十二題答題結果交叉表

二十二理 * 二十二答 交叉表

個數		二十二答				總和
		1	2	3	4*	
二十二理	A	0	0	0	2	2
	C	0	33	0	0	33
	D	0	1	0	0	1
	E	0	0	17	0	17
	F*	1	0	1	145	147
總和		1	34	18	147	200

2.答題結果說明分析

此題是評量學童能在帶分數除以真分數，全部分完的包含除問題之表現情形。該題的正確答案是 4F，有 145 位學童答對，佔全體學童人數之 77.5%。有 2 位學童選擇了 4A，儘管這 2 位學童選擇了對的答案選項，可是卻選擇了錯的理由選項；相對的也有 2 位學童分別選擇了 1F、3F，雖然選擇了對的理由選項，不過卻選擇了錯誤的答案選項。上述 4 位學童分別在答案選項或理由選項未選擇正確的選項，所以不具有正確觀念。本題中，學童常犯的錯誤是 2C，有 33 位學童選擇了這一個選項： $4\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$ ，由於學童會錯題意，誤用乘法解決除法問題。有 17 位學童選擇了 3E： $4\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = (4 \times 1) + (\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}) = 4 + \frac{3}{8} = 4\frac{3}{8}$ 杯，分數除法中，被除數為帶分數，誤將帶分數的整數與分數部分，個別分開運算。

(二十三) 第二十三題分析

1.第二十三題答題結果

表 4-1-24 學童在第二十三題答題結果交叉表

二十三理 * 二十三答 交叉表

個數		二十三答			總和
		1*	2	3	
二十三理	B	2	21	0	23
	C	0	1	7	8
	D	1	10	0	11
	F*	157	1	0	158
總和		160	33	7	200

2.答題結果說明

此題是評量學童在解決帶分數先減後加的兩步驟問題之表現情形。該題的正確答案是 1F，有 157 位學童答對，佔全體學童人數之 78.5%，有 3 位學童分別選擇了 1B 及 1D，選擇了對的答案選項，不過卻選擇了錯誤的理由選項；有 1 位學童選擇了 2F，選擇了對的理由選項，不過卻選擇了錯誤的答案選項。上述 3 位學童分別在答案選項或理由選項未選擇正確的選項，所以不具有正確觀念。本題中，學童常犯的錯誤是 B 選項，有 23 位學童選擇了這一個選項： $2 + 2 + \frac{1}{3} + \frac{8}{12} = 4 + \frac{9}{12}$ ，異分母分數的加法中，分母通分但分子卻未加以處理而直接相加。有 11 位學童選擇了 D 選項： $2\frac{1}{3} + (3\frac{11}{12} - 1\frac{3}{4}) = 2\frac{1}{3} + (3\frac{11}{12} - 1\frac{3}{12})$ ，在異分母分數加減法運算過程中，分母通分但分子未處理就直接相加。有 8 位學童選擇了 C 選項： $2\frac{1}{3} + (3\frac{11}{12} - 1\frac{3}{4}) = 2\frac{1}{3} + 2\frac{8}{8}$ ，在異分母分數法運算過程中，分母減分母，分子減分子。

(二十四) 第二十四題分析

1..第二十四題答題結果

表 4-1-25 學童在第二十四題答題結果交叉表

二十四理 * 二十四答 交叉表

個數		二十四答				總和
		1	2	3	4*	
二十四理	A	0	0	21	0	21
	B	3	1	1	0	5
	C	0	0	4	0	4
	D*	0	0	0	143	143
	E	0	3	0	0	3
	F	0	0	13	11	24
總和		3	4	39	154	200

2.答題結果說明

此題是評量學生在除數是分數，先除後乘的兩步驟問題之表現情形。該題的正確答案是 4D，有 143 位學童答對，佔全體學童人數之 72.5%，有 11 位學童選擇了對的答案選項，不過卻選擇了錯誤的理由選項，所以這 11 位學童並不具有正確的觀念。本題中，有 24 位學童選擇了 3F： $70 \div \frac{2}{5} \times 9 = \frac{1}{70} \times \frac{5}{2} \times 9$ ，這是學童常犯的錯誤，在分數除法運算中，誤將被除數寫成倒數。有 21 位學童選擇了 3A 這一個選項： $70 \div \frac{2}{5} \times 9 = 70 \times \frac{2}{5} \times 9$ ，未將除數寫成倒數相乘。有 5 位學童選擇了 B 選項： $70 \div \frac{2}{5} \times 9 = 70 \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{9}$ ，沒有把除數寫成倒數相乘，又誤將乘以 9 寫成了乘以 $\frac{1}{9}$ ，分數除法與乘法混淆使用。有 4 位學童選擇 3C 選項： $70 \div \frac{2}{5} \times 9 = \frac{1}{70} \times \frac{2}{5} \times 9$ ，分數除法中誤將被除數寫成倒數，而且除數也沒有寫成倒數相乘。有 3 位學童選擇了 2E 選項： $70 \div \frac{2}{5} \times 9 = 70 \times \frac{5}{2} \times \frac{1}{9}$ ，與 B 選項部分相似，誤將乘以 9 寫成了乘以 $\frac{1}{9}$ ，分數除法與乘法混淆使用。

（二十五）第二十五題分析

1.第二十五題答題結果

表 4-1-26 學童在第二十五題答題結果交叉表

二十五理 * 二十五答 交叉表

個數		二十五答				總和
		1	2	3*	4	
二十五理	A	48	0	1	0	49
	B	0	0	1	0	1
	C	0	1	0	0	1
	D	0	0	14	1	15
	F*	1	0	132	1	134
總和		49	1	148	2	200

2.答題結果說明

此題是評量學生在除數是分數，先除後減的兩步驟問題之表現情形。該題的正確答案是 3F，有 132 位學生答對，佔全體學童人數之 66%，有 16 位學童分別選擇了 3A、3B 及 3D，雖然選擇對的答案選項，不過卻選擇了錯誤的理由選項；相對的也有 2 位學童分別選擇了 1F、4F，雖然選擇了對的理由選項，不過卻選擇了錯誤的答案選項。上述 18 位學童，並沒有完全選擇正確的答案及理由選項，所以並不算具有正確的觀念。在本題中，學童常犯的錯誤是 A 選項，有 49 位學童選擇了這一個選項： $60 \div \frac{3}{5} = 60 \times \frac{3}{5}$ 未將除數寫成倒數。另外，有 15 位學童選擇了 D 選項： $\frac{3}{5} \div 60 = \frac{5}{3} \times 60$ ，分數除法中，誤將被除數寫成了倒數相乘。有 1 位學童選擇了 B 選項： $60 \div \frac{3}{5} = 60 \times \frac{5}{3} = \frac{60}{3} \times \frac{5}{3}$ ，整數乘以分數，誤將 60 寫成 $\frac{60}{3}$ 。有 1 位學童選擇了 C 選項： $60 \div \frac{3}{5} = 60 \times \frac{3}{5}$ ，未將除數寫成倒數相乘。

(二十六) 第二十六題分析

1.第二十六題答題結果

表 4-1-27 學童在第二十六題答題結果交叉表

二十六理 * 二十六答 交叉表

個數		二十六答				總和
		1	2	3*	4	
二十六理	A	0	35	0	0	35
	B	12	0	0	0	12
	C*	0	0	100	0	100
	D	0	0	0	25	25
	E	0	22	0	0	22
	F	6	0	0	0	6
總和		18	57	100	25	200

2.答題結果說明

此題是評量學童在分數先加後除的兩步驟問題之表現情形。該題的正確答案是 3C，有 100 位學童答對，佔全體學童人之 50%。其中學生常犯的錯誤是 2A，有 35 位學童選擇了政一個選項： $\frac{5}{7} - \frac{2}{3} + \frac{2}{7}$ ，誤將 $\frac{5}{7}$ 當作全部且單位量也不同。有 25 位學童選擇了 4D： $\frac{5}{7} + \frac{2}{3} + \frac{2}{7}$ ；有 22 位學童選擇了 2E： $\frac{5}{7} + \frac{2}{7} - \frac{2}{3}$ ；有 12 位學童選擇了 1B： $(\frac{2}{3} + \frac{2}{7}) \times \frac{5}{7}$ ；有 6 位學童選擇了 1F： $\frac{5}{7} \div (\frac{2}{3} + \frac{2}{7})$ 。上述 65 位學童對本題題意概念不清，這一題也是所有題目當中答對率最低的一題。



第二節 學童在分數運算之錯誤類型

壹、學童在分數運算之錯誤類型

一、研究者從評量試題之題號順序再依據學童答題結果歸納出以下的錯誤：

表4-2-1 學童所選擇的錯誤理由選項說明表

題號	評量目標	學童所選擇的錯誤理由選項說明
一	用分數數詞來描述部分跟全體的分割關係。	* 直觀誤以 $\frac{3}{5}$ 為全部，而忽略全部應是 $\frac{5}{5} = 1$ 。
二	知道部分量跟全體量的關係，求全體量。	* 5張中的其中1張是全部的 $\frac{1}{5}$ ，所以全部是5張。 * 5張愛心卡中的其中一張： $\frac{1}{5}$ 的 $\frac{1}{5}$ 倍是 $\frac{1}{25}$ ，所以全部是25張。
三	同一的二維的基準量，不同的分割方式，合成其中幾份的量相等。（等積異形）	* 吃2等份的三角形蛋糕合起來會等於吃1個長方形蛋糕，所以3等份的三角形蛋糕合起來會大於1個長方形蛋糕，所以巧虎多吃1等份三角形蛋糕，巧虎吃得更多。 * 同樣將蛋糕分成是8等份，但因為三角形蛋糕看起來比長方形蛋糕小，所以小花吃得更多。 * 2等份的三角形蛋糕會等於一等份的三角形蛋糕；沒有等分概念，以直觀判斷蛋糕的大小。
四	在離散量的情境中，單位分數內容為多個時，進行異分母同分子分數的加法。	* $\frac{4}{5} + \frac{4}{10} = 8 + 4 = \frac{12}{10}$ * 通分後沒有將分母改為通分數的分母；異分母分數加法誤以分母+分母，分子+分子。 * 分母通分忽略分子，使得分子不便就直接相加。

題號	評量目標	學童所選擇的錯誤理由選項說明
五	在離散量的情境中，單位分數內容為多個時，進行異分母同分子分數的加法。	$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1+1}{6} = \frac{2}{6}$ 盒， $12 \div 6 = 2$ ， $2 \times 2 = 4$ 個。 * 異分母分數相加分母通分，忽略分子，分子不變卻直接相加。 * 通分後，分母相加，分母+分母，分子+分子。
六	在連續量的情境中比較相同單位量異分母異分子分數的大小。	$\frac{8}{20} > \frac{4}{10}$ ，所以 <u>巧虎</u> 吃得更多。 * 分母及分子越大，則分數值越大。 * 分母通分後，分子不變卻直接相減。 * 異分母分數相減，沒有通分且分母減分母。
七	在離散量的情境中進行異分母同分子分數的比較。	* 分子相同，分母不同，因為分母15的分數比分母5的分數大，所以 <u>巧虎</u> 吃的披薩較多。 * 異分母分數比較，誤以分母較大，別分數值較大。 * 分數乘以整數 $\frac{2}{5} \times 3 = \frac{6}{15}$ ，分子和分母同乘以一數。
八	* 能在離散量的情境中比較相同單位量同分母分數的大小。	* 不必考慮分母是否相同，因為分子5比分子4大，所以 <u>小花</u> 吃的餅乾比較多。 * 不考慮分母是否相同，直接比較分子的大小。 * 異分母分數比較，誤以分母較大，別分數值較大。 * 異分母分數相減誤以分母減分母，分子減分子。

題號	評量目標	學童所選擇的錯誤理由選項說明
九	能在離散量的情境中進行同分母分數的加法。	* $\frac{4}{6} \times 2 = 8$, $\frac{5}{6} \times 2 = 10$, 忽略分數的寫法。 * 分數乘以整數,忽略分母。 * 同分母相加,將分母+分母。
十	能在連續量的情境中進行同分母分數的加減法。	* 分數乘以整數 $\frac{3}{9} \times 2 = \frac{6}{18}$, 分子和分母同乘以一數。
十一	認識假分數的意義	* 誤認為假分數是分子大於分母但分子不等於分母的分數。 * 假分數定義中,忽略分子等於分母的分數。
十二	假分數的加法	* $\frac{5}{4} + \frac{23}{4} = \frac{28}{4} = 2\frac{8}{4} = 3 + 2 = 5$ * 假分數化成異分數,誤以分子的十位數字為整數。 * 同分母分數加法,誤將分母加分母。
十三	等值分數	* 因為分數值都要大於 $\frac{1}{4}$ 且小於 $\frac{1}{2}$, 誤以為表示只要分數值大於 $\frac{1}{8}$ 即可。 * 應表示分數值要大於 $\frac{2}{8}$ 且小於 $\frac{4}{8}$; 誤以分母大的分數值越大。

題號	評量目標	學童所選擇的錯誤理由選項說明
十四	能在連續量情境中，進行帶分數的加法	* $2\frac{1}{4} + 1\frac{2}{3} = (2+1) + (1+2) + (4+3) = 3\frac{3}{4}$ * 帶分數加法運算過程忽視分數的意義,所有數字皆以整數加法處理。 * 分數的加法,未經通分,誤將分母直接相加。 * 通分後略分子的運算,分子未乘上同一倍數,甚至誤將分子加分子,作為分子的數。 * 異分數的加法,未經通分誤將分母直接相加。
十五	異分母分數的加減	* $2\frac{1}{4} - 1\frac{2}{15} + \frac{1}{12} = 2\frac{1}{60} - 1\frac{2}{60} + \frac{1}{60}$。 * 在通分過程中,忽略分子,使得分子不變直接相加。 * 分數的加減,忽略分數的意義誤將分子及分母以整數方式直接進行換算。 * 在通分過程中分母與分子要同乘以一數。
十六	帶分數乘以整數的乘法運算	* $1\frac{3}{5} \times 7 = 1 \times 7 + \frac{3}{5} \times 7 = 7 + \frac{21}{35}$。 * $1\frac{3}{5} \times 7 = \frac{8}{5} \times 7 = \frac{8 \times 7}{5 \times 7} = \frac{56}{35}$。 * 分數乘以整數，$\frac{3}{5} \times 7 = \frac{21}{35}$，誤將通分法則與乘法法則混淆使用。

		* 分數乘以整數時，$1\frac{3}{5} \times 7 = \frac{8}{5} \times 7$ $= \frac{8 \times 7}{5 \times 7}$，分子直接乘以整數，分母乘以1應該仍為原數。
十七	假分數乘以假分數的乘法運算	* $\frac{21}{6} \times \frac{18}{7} = \frac{7}{2} \times \frac{18}{7} = \frac{7}{2} \times \frac{7}{18}$。 * 誤將分數乘法以分數除法來處理，乘上乘數的倒數。 * 分數乘法不須通分先通分再相乘。 * 誤將分數乘法過程中以分母相乘，分子相加來處理。
十八	能在離散量情境中，進行真分數乘以整數的運算	* $\frac{3}{5} \times 20 = \frac{5}{3} \times 20$。 * 分數乘以整數，被乘數不須寫成倒數。 * 分數乘法中，誤將分子分母同乘上一整數。 * 分數乘以整數中，誤以整數除以分數來計算。
十九	乘數是帶分數，積是整數的被乘數未知的問題	* $\square \times 3\frac{1}{4} = 52, \square = 52 \div 3\frac{1}{4} = 52 \times 3\frac{1}{4}$ * 分數的除法，誤將除號直接換寫成乘號，且之後再以分數除法規則解題；忽視帶分數的意義，而誤將$3\frac{1}{4}$寫作是$\frac{13}{4}$。 * 乘法與除法運算法則混淆使用。
二十	能在連續量的情境中，進行分數除以整數的運算	* $\frac{5}{6} \div 7 = \frac{6}{5} \times 7$。 * 分數除法規則中，被除數不必寫成倒數。 * 乘法與除法運算法則混淆使用。

題號	評量目標	學童所選擇的錯誤理由選項說明
二十一	被乘數未知，乘數為帶分數的乘法問題	$* \text{甲} \times 4\frac{1}{2} = 9, \text{甲} = 9 \div 4\frac{1}{2} = 9 \div \frac{9}{2} = 9 \times \frac{2}{9}。$ * 分數除法以分數乘法處理。 * 分數除法未將除數寫成倒數。 * 分數乘法與分數除法運算法則混淆使用。
二十二	帶分數除以真分數，全部分完的包含除問題	$* 4\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = (4 \times 1) + (\frac{1}{2} \times \frac{3}{4})。$ * 誤用分數乘法解決分數的除法的問題。 * 分數除法未將除號改成乘號。
二十三	帶分數先減後加的兩步驟問題	$* 2\frac{1}{3} + (3\frac{11}{12} - 1\frac{3}{4})$ $= 2\frac{1}{3} + (3 - 1) + (\frac{11}{12} - \frac{3}{4})$ $= 2\frac{1}{3} + 2 + \frac{8}{12}。$ * 異分母分數的加減，分母通分但分子卻不變，且直接相加減。
二十四	除數是分數，先除後乘的兩步驟問題	$* 70 \div \frac{2}{5} \times 9 = 70 \times \frac{5}{2} \times \frac{1}{9}$ * 分數除法中，誤將被除數寫成倒數。 * 分數乘法與分數除法運算法則混淆使用。
二十五	除數是分數，先除後減的兩步驟問題	$* 60 \div \frac{3}{5} = 60 \times \frac{3}{5}。$ * 未將除數寫成倒數計算，且誤將60人當作全校人數。
二十六	分數先加後除的兩步驟問題	$* \frac{5}{7} - \frac{2}{3} + \frac{2}{7}$ * 疏忽數量的單位：題目的是 $\frac{5}{7}$

		杯的水，倒出$\frac{2}{3}$公升後，杯子裡還剩下$\frac{2}{7}$公升的水，杯子的容量是多少公升？學童沒有考慮「公升」與「杯」兩者單位的不同，因此將$\frac{5}{7}$杯的水當作是$\frac{5}{7}$公升，於是將$\frac{5}{7} - \frac{2}{3} + \frac{2}{7}$。
--	--	---

二、研究者依據各評量主題，將大多數學童在本研究中所犯的錯誤類型加以描述如下：

（一）等分割概念：

- 1.學童誤認為「等分」就是除了面積相等以外，形狀也必須相同。（例如：第三題）。
- 2.比較分數的大小，只是直觀的以圖形的多少或只根據分子或分母的大小來作為判斷依據。（例如：第三、六、七、八、十三題）。
- 3.學童在做比較分數的大小時，不會直接將分數換成符號再做比較，只是憑感覺或受到分子、分母的大小來比較。（例如：第三、六、七、八、十三題）。

（二）部分全體概念：

- 1.學童在「部分/全體」模式、「子集/集合」模式中，往往忽略給定的單位量或基準量。（例如：第一、二、九、十、二十六題）。
- 2.部分學童若只從題目描述而未直觀全體或集合，就容易將題目中的部分或子集當作全體或集合。（例如：第一、二題）。

（三）分數加減法運算

- 1.以直接法進行運算，分母加減分母，分子加減分子，忽略是否為同分母。（例如：第四、五、六、七、八、九、十二、十四、十五、二十三題）。
- 2.在異分母分數的加減運算中，分母通分，但分子未處理就直接相加減。（例如：第四、五、九、十二、十四、十五、二十三題）。
- 3.分數的加法與分數乘法運算混淆使用。（例如：第十題）。
- 4.未以分數運算處理，忽略分數的意義。（例如：第四題）。
- 5.分數加減運算過程中，將分數數寫成整數形式，最後答案中再改寫成分數形式，忽略分數概念。（例如：第四、五、九、十、十四題）。
- 6.異分母分數加減運算過程，在進行通分時，分母與分子沒有同乘以一個整數。（例如：第六、十四、十五題）。

- 7.異分母分數比較大小，通分過程中，兩個異分母分數誤同乘同一個倍數。
(例如：第七題)。
- 8.假分數的加減，誤將假分數中分子的十位數字當作帶分數之整數。
(例如：第十二題)。
- 9.帶分數的加減，忽略分數的意義，將所有分數上數字以整數方式個別計算，最後再寫成分數形式。(例如：第十四題)。

(四) 假分數、帶分數

- 1.忽略分子等於分母的分數。(例如：第十一題)。
- 2.誤認為只要是分子不等於分母的分數即是假分數。(例如：第十一題)。
- 3.假分數化成帶分數概念不清，誤將假分數中分子的十位數字當作帶分數之整數。(例如：第十二題)。
4. 整數和分數分開運算、分配律的錯誤用。(例如：第二十二題)。

(五) 分數的乘法

- 1.帶分數乘以整數，整數與分數個別分開運算，忽略分數也要乘以整數。
(例如：第十六題)。
- 2.分數乘以整數，分子和分母同時乘上整數。
(例如：第十六、十八、二十四題)。
- 3.乘上乘數的倒數，與分數除法混淆使用。
(例如：第十七、十八、二十二、二十五題)。
- 4.先通分再相乘，與分數加法混淆使用。
(例如：第十六、十七、二十五題)。
- 5.分母相乘，分子相加，與分數加法混淆使用。(例如：第十六、十七題)。

(六) 分數的除法

- 1.分數除以整數時，乘上被除數的倒數。
(例如：第二十、二十一、二十四、二十五題)。
- 2.直接將除法換成乘法，忽略要乘上除數的倒數。(例如：第二十一題)。
- 3.與分數乘法混淆使用。
(例如：第二十、二十一、二十二、二十四、二十五題)。
- 4.進行分數除法時，忽略帶分數的整數部分。(例如：第十九題)。
- 5.未將除號改成乘號。(例如：第二十二、二十四題)。

(七) 不瞭解題意。

- (例如：第十二、二十、二十一、二十二、二十五、二十六題)。

貳、將本研究錯誤概念類型與文獻作分析後所得的結果

表4-2-2 本研究錯誤概念類型與文獻作分析後所得的結果

主題	學者	錯誤類型	學者們的研究發現	本研究 中發現
等分、等分割概念	郭昇欣（2005） 陳和貴（2002）	缺乏『等分』概念。	v	v
	陳和貴（2002）	2.誤認為『等分』就是除了面積相等以外，形狀以必須相同。	v	v
	本研究	部分學童若只從題目描述而未直觀全體或集合，就容易將題目中的部分或子集當作全體或集合。		v
部分全體概念	吳相儒（2001） 陳和貴（2002） 黃寶彰（2003） 郭昇欣（2005）	忽略給定的單位量、對於單位量與單位分量無法明確辨認。	v	v
	吳相儒（2001）	分量與單位分量間的化聚發生錯誤。	v	
分數加減法	Tatsuoka（1984） 及 Painter（1989）	分子加分子，分母加分母。	v	v
		求出公分母後放在分母，而分子為原分子相加。	v	v
		分母相乘，分子相加。	v	
		分母相乘，分子相乘。	v	
		通分後，分子為大數減去小數。	v	
		分母減分母，分子減分子而且是大數減小數。	v	
		求出公分母後放在分母，而分子為原分子相減。	v	v
	本研究	未以分數運算處理，忽略分數的意義		v
		分數加減運算過程中，將分數數寫成整數形式，最後答案中再改寫成分數形式，忽略分數概念。		v
		異分母分數加減運算過程，在進行通分時，分母與分子沒有同乘以一個整數。		v

比較分數大小 等值分數	吳相儒（2001） 陳和貴（2002）	進行兩個分數的比較時，以分子或分母的大小作為判斷分數大小的依據。	v	v
	黃寶彰（2003）	在比較分數大小方面，則受到學童分數運算不熟練的或對分數倍不熟悉影響，而出現錯誤。	v	
	劉天民（1992）	學生在進行加減法運算時，誤用乘法運算性質。	v	v
帶分數、假分數	劉天民（1992）	學生在進行分數的四則運算時，各自對分子、分母及整數分開進行計算。	v	v
		學生在處理帶分數化成假分數的問題時，常將分子計算錯誤。	v	v
		學生在處理通分的問題時，常將分子計算錯誤。	v	v
	吳相儒（2001）	假分數化為帶分數時，受到整數十進位位值概念的干擾。	v	
	本研究	假分數的加減，誤將假分數中分子的十位數字當作帶分數之整數。		v
		帶分數的加減，忽略分數的意義，將所有分數上數字以整數方式個別計算，最後再寫成分數形式		v
		分配律的錯誤用		v
分數的乘法	Lankford（1972）、 Edwards（1983）及 Painter（1989）	先通分，再計算。	v	v
		將第二個分數顛倒後，再計算。	v	v
		交叉相乘而得到分子與分母。	v	
		分母相乘，分子卻作加法運算。	v	v
		分數乘整數時，分數不變，只處理整數部分。	v	v
		帶分數乘整數時，整數、分數分別自行做乘法運算。	v	v
		計算方法錯誤（用乘法計算）。	v	v

分數的乘法		加分子，乘分母。	V	V
分數的除法		被除數倒置。	V	V
		除數及被除數均倒置。	V	V
		分母不變，但分子直接做除法運算。	V	V
		帶分數除以整數時，只做整數之間的運算。	V	V
		分母不變，但分子相減。	V	
		未求出第二個分數的倒數，而直接做乘法運算。	V	V
	本研究	進行分數除法時，忽略帶分數的整數部分。		V

研究者整理

經由分析比對之後，研究者發現幾種不同於文獻中的錯誤類型：

- 一、等分、等分割概念：部分學童若只從題目描述而未直觀全體或集合，就容易將題目中的部分或子集當作全體或集合。
- 二、部分全體概念：分量與單位分量間的化聚發生錯誤。
- 三、分數的加減：分母相乘，分子相加；分母相乘，分子相乘；通分後，分子為大數減去小數；分母減分母，分子減分子而且是大數減小數；未以分數運算處理，忽略分數的意義；分數加減運算過程中，將分數數寫成整數形式，最後答案中再改寫成分數形式，忽略分數概念；異分母分數加減運算過程，在進行通分時，分母與分子沒有同乘以一個整數。
- 四、比較分數大小：受到學童分數運算不熟練的或對分數倍不熟悉影響，而出現錯誤。
- 五、假分數、帶分數：假分數化為帶分數時，受到整數十進位位值概念的干擾；假分數的加減，誤將假分數中分子的十位數字當作帶分數之整數；帶分數的加減，忽略分數的意義，將所有分數上數字以整數方式個別計算，最後再寫成分數形式；分配律的錯誤用。
- 六、分數的乘法：交叉相乘而得到分子與分母。
- 七、分數的除法：分母不變，但分子相減；進行分數除法時，忽略帶分數的整數部分。

此外，部分文獻中錯誤類型經過前導性測驗之後發現，學生所犯之情形不明顯，因此並沒有在誘答選項中設計相關錯誤類型之選項。

第三節 學童在分數運算概念之完整性及評量實作發現

壹、學童在分數運算二階段式診斷評量之表現

透過學童在分數運算二階段式的診斷評量，研究者彙整研究對象 200 位學童成績，其分配圖如下：

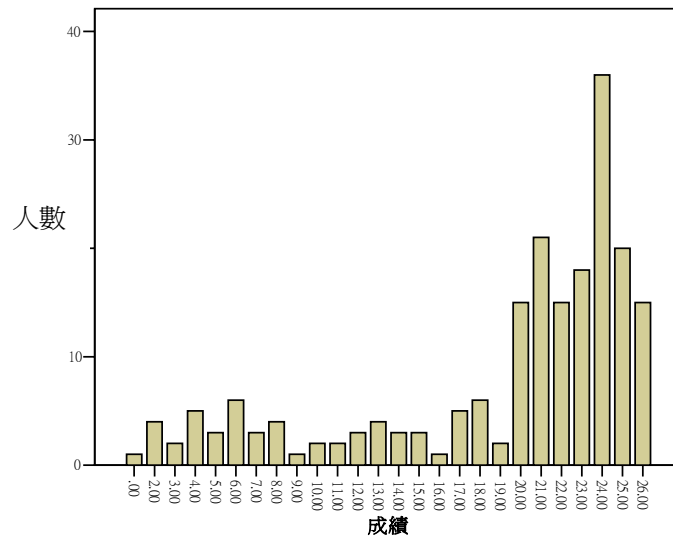


圖 4-3-1 學童成績分配圖

由成績統計結果得知，學童在分數運算二階段式診斷評量的平均分數為 19.25 分，從分配圖中也觀察到整個成績是偏向右側，顯示這一份評量試題的難度並不高，平均答對率也達七成，多數學童在分數運算二階段式診斷評量之成績表現尚佳。然而，單從成績表現來判定學童在分數運算概念的表現似乎不足以說明其概念的完整性，故研究者試圖將此評量試題加以分類，欲由系統化的分析，以學童在解答案選項搭配理由選項的組合，再以順序性的題目呈現歸納學生在評量中的選項答案，透過學童的在分數運算二階段式診斷評量之表現，以能進一步探討學童答題組合中存有的概念類型。研究者先以因素分析，探討學生答題上存有之概念組合類型，分析結果呈現本評量試題可分成六大類，但因素分析之分類主軸與學童分數學習內容順序未能合理解釋，且以因素分析說明與分析學童分數運算概念類型時，無法完整說明其問題的癥結點，例如：教師在教分數的加法時，不會將分數的除法一併教學，如此反而會混亂學童的基本概念。相對的，我們在探討

分數加法時並不會直接因為分數除法內的某一運算概念的錯誤而影響分數加法的運算，所以為便於進行學童學童在分數運算概念之探究，故研究者將分數運算評量試題二十六題依照主題特性並配合國小課程綱要之分年細目的順序性分為九大類，如表 4-3-1，再根據各主題答題結果，進行答對人數累積之統計，以探討學童在分數運算概念之完整性。答對累積人數指的是學生在 26 題答對的累積情形，主題 A 的答對累積人數是指 1，2，3 題均答對者的人數，共計 120 人。主題 I 則是指在所有 26 題均答對的總人數，共計 15 人。圖 4-3-1 顯示隨著概念難度增加，答對總人數下降的現象。

表 4-3-1 分數運算評量試題之評量主題內容表

項次	評量主題內容	題號
主題 A	等分的概念	一、二、三
主題 B	分數的加法	四、五、九、十二、十四
主題 C	分數的減法	十
主題 D	分數的加減法	十五、二十三
主題 E	分數的比較大小	六、七、八
主題 F	假分數的意義	十一
主題 G	等值分數	十三
主題 H	分數的乘法	十六、十七、十八、十九、二十一
主題 I	分數的除法	二十、二十二、二十四、二十五、二十六

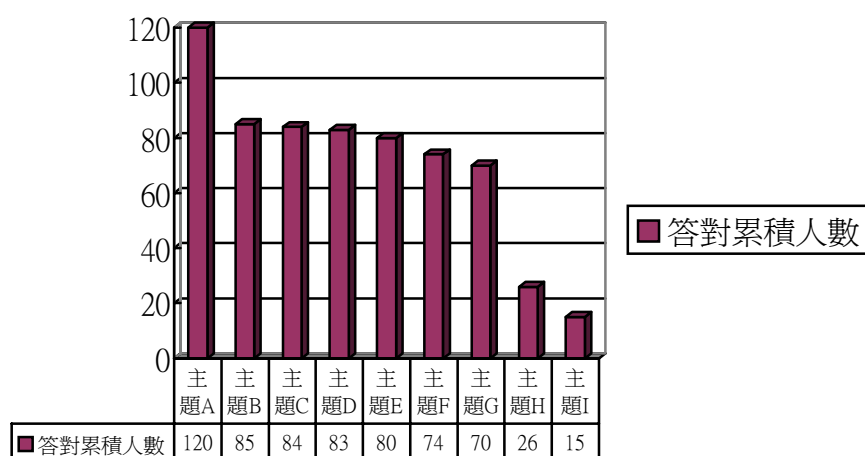


圖 4-3-1 主題 A 至主題 I 答對累積人數圖

由圖 4-3-1 主題 A 至主題 I 答對累積人數結果發現，主題 A 答對累積人數為 120 人，所以學童總人數之 60% 具備在二、三年級分數概念的分年細目所提及的能力。不過，到了主題 B 答對累積人數卻驟降為 85 人，佔全體人數之 42.5%，因此具備分數概念的學童與能進行分數實際運算的學童人數有很大的落差。

主題 B、主題 C、主題 D 是屬於同一運算的概念階層，所以在此 3 主題的答對累積人數分別是 85 人、84 人及 83 人，然而主題 E 與主題 C 及主題 D 又有密不可分的關係，主題 E 的答對累積人數恰巧是 80 人與主題 B、C、D 的答對累積人數差不多，所以對應相關分數概念之分年細目發現學童在此階段是呈現分數概念連貫狀態。

主題 F 是理解假分數的意義，答對累積人數為 74 人，這一個主題概念乍看之下並不困難，但從答對累積人數中看出數字是微微的下滑，研究者也發現有很多學童其分數及運算概念是連貫的，但對於假分數的認知上全都是認為假分數是分子大於分母的分數卻忽略了當分母等於分子的分數，這樣的共通性是一個很特殊的現象，可以提供教師在教學時的一個參考。

主題 G 是等值分數概念，需要具備等分割、通分等概念。在分割份數少時學童可以直觀判斷，但是對於分割份數較多時學童就以錯誤概念判斷，錯以為分母大的分數值越大，因此這一主題答對累積人數為 70 人。

主題 H 是分數的乘法，答對累積人數驟降為 26 人，由圖 4-3-1 發現，這是一個分數運算概念連貫性的關鍵點。很多學童在分數加減法類型當中表現很好，但是卻以分數加減法則來進行分數乘法的問題，以致於答對人數會驟降。

主題 I 是分數的除法，答對累積人數為 15 人，分數的除法對學童而言也算得上是弱點，很多學童將分數乘法算則與分數除法算則混淆使用，所以答對率偏低。

總之，具備國小分數概念完整性之學童人數為 15 人，占總人數之 7.5%，偏低的比率的確值得教師們深思。

貳、學童在分數運算概念之完整性

研究者依據評量結果分析學童在分數運算概念之完整性，可依部分與全體的分割關係、等分概念、分數的加法、分數的減法、分數的比較大小、數線上的分數、假分數的意義、等值分數、分數的乘法、分數的除法等以及配合能力指標對應後，以圖表進行相關研究發現之說明。

一、部分跟全體的分割關係、等分概念

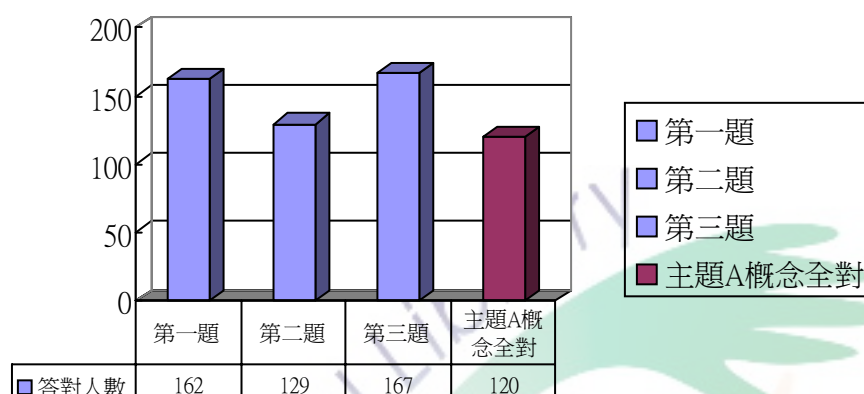


圖 4-3-2 學童在部分跟全體的分割關係、等分概念正確人數統計圖

第一題是用分數數詞來描述部分跟全體的分割關係，對應 92 年版數學領域課程綱要分年細目 2-n-10，學童在二年級就應具備此能力，由圖 4-3-1 得知，在研究中有 162 位學童具有此項的能力。第二題是評量知道部分量跟全體量的關係，求全體量；第三題是同一的二維的基準量，不同的分割方式，合成其中幾份的量相等（等積異形），與第二題都對應 92 年版數學領域課程綱要分年細目 3-n-09，不過第二題答對總人數只有 129 人，第三題卻有 167 人，然而主題 A（包含第一題至第三題）對於學童在部分跟全體的分割關係、等分概念正確，答對的累積人數就只剩下 120 人。在此評量試題中第一題與第三題由於學童可以在試題本上看到全體量，所以學童可以利用平分、等分割的直覺來進行正確的判斷；在第二題的題目中學童在試題本上看到的圖形只是部分量，然後要學童求全體量，困難度是比第一題及第三題高，由圖 4-3-1 明顯看出第二題答對人數減少至 129 人，因此建議教師在

進行此概念教學初期應透過學童可以直觀的具體情境或活動中掌握分數概念，以利之後學習分數運算概念降低錯誤率。

二、分數的加法

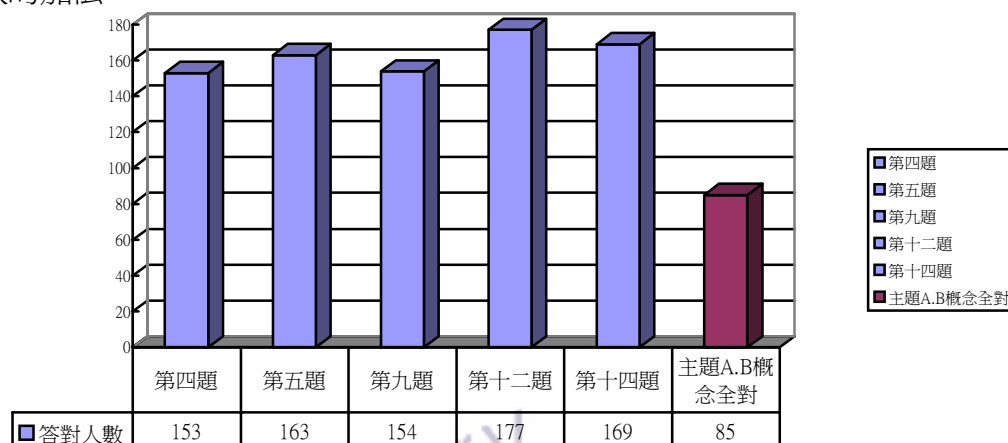


圖 4-3-3 學童在分數加法概念正確人數統計圖

第四題是評量能在連續量的情境中，進行相同單位量分子相同之分數的加法，這一題是異分母同分子的分數加法，學童將此題型當作是同分母加法來運算，使得答對人數為 153 人。第五題是評量在離散量的情境中，單位分數內容為多個時，進行異分母同分子分數的加法，這一題也是異分母同分子的分數加法，答對人數為 163 人。以答對人數來看，第五題答對人數高於第四題的答對人數，由於第五題屬於離散量且學童可自行點數較第四題連續量容易，所以答對人數比例較高。第九題是能在離散量的情境中進行同分母分數的加法，這一題是同分母分數的加法，相較於前兩題應是屬於比較簡單題目，不過卻只有 154 人答對，研究者發現原因在於單位量錯誤所形成。第十二題假分數的加法，答對人數為 177 人；第十四題是能在連續量情境中，進行帶分數的加法，答對人數為 169 人。以上五題屬於分數的加法，由圖 4-3-1 以答對人數來看這五題平均答對人數約為 163 人，可是主題 A、主題 B 累積答對人數卻只有 85 人，換句話說，將近 78 位學童在這兩主題概念間的完整性是令人質疑的。除此之外，主題 A 累積答對人數 120 位學童當中，有 35 人並沒有通過主題 B 的考驗，佔全體人數的 17.5%。由此發現，從主題 A 至主題 B 累積答對人數是驟降的，分數等分割概念進入到分數實際運算兩者間勢必

需要相當紮實的分數概念及操作，否則只會加法運算法則卻無法正確解釋其理由將導致觀念的不完整。

三、分數的減法

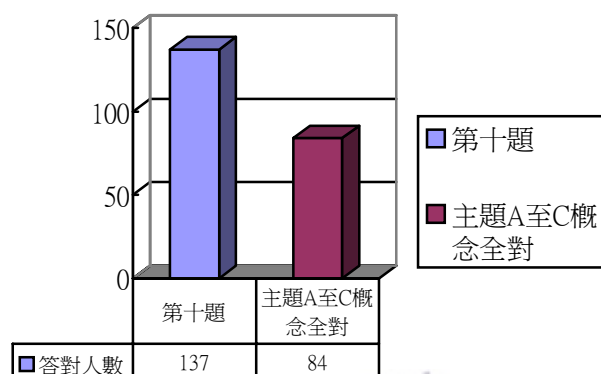


圖 4-3-4 學童在分數減法概念正確人數統計圖

第十一題是評量在連續量的情境中進行同分母分數的加減法，答對人數為 137 人，佔全體總人數之 68.5%。

四、分數的加減法

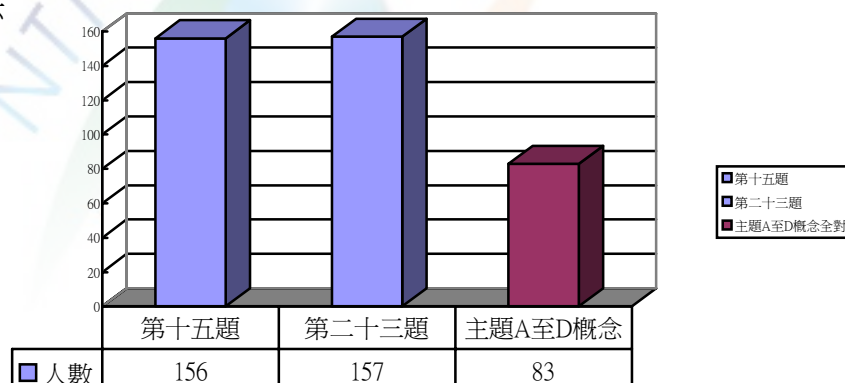


圖 4-3-5 學童在分數加減法概念正確人數統計圖

第十六題是評量異分母分數的加減；第二十四題是評量帶分數先減後加的兩步驟問題。兩題的答對人數分別為 156 人及 157 人，主題 A 至 D 概念全對累計人數是 85 人。主題 B、C 及主題 D 是密切相關的概念答對人數幾乎是一致的，顯然此 3 主題概念是完整的。

五、分數的比較大小

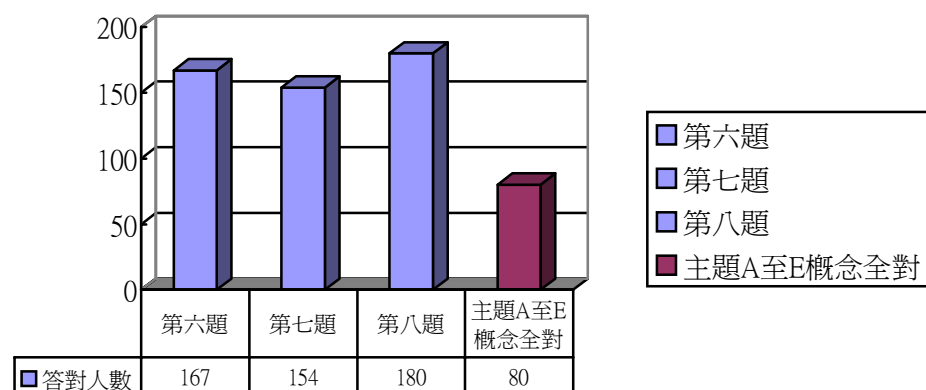


圖 4-3-6 學童在分數的比較大小概念正確人數統計圖

第六題是評量在連續量的情境中比較相同單位量異分母異分子分數的大小，答對人數分別為 167 人；第七題評量在離散量的情境中進行異分母同分子分數的比較，答對人數分別為 154 人；第八題評量能在離散量的情境中比較相同單位量同分母分數的大小，答對人數分別為 180 人。由於第八題是同分母分數之比較對學生而言是屬於較容易判斷的問題，所以答對人數較高。從主題 A 至主題 E 全對的累積人數為 83 人，與從主題 A 至到主題 D 的累積人數差不多，所以學童對於分數運算概念到此階段仍是完整的。

六、假分數的意義

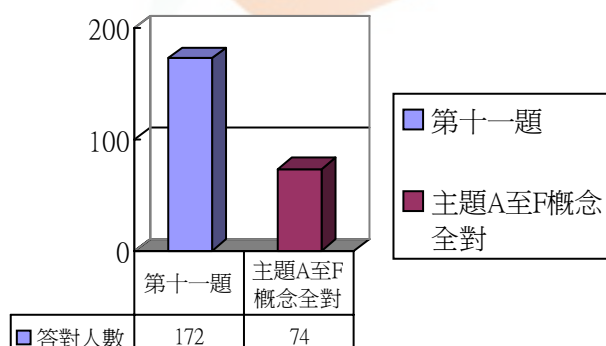


圖 4-3-7 學童在假分數的意義概念正確人數統計圖

第十一題認識假分數的意義，答對人數為 172 人，主題 A 至主題 F 累積答對人數為 68 人，兩者之間人數相差了將近 3 倍，換句話說有其中 2 倍的學童在分數加減運算階段之後其分數概念就不完整了，此危機正可以提供教師教學參考。

七、等值分數

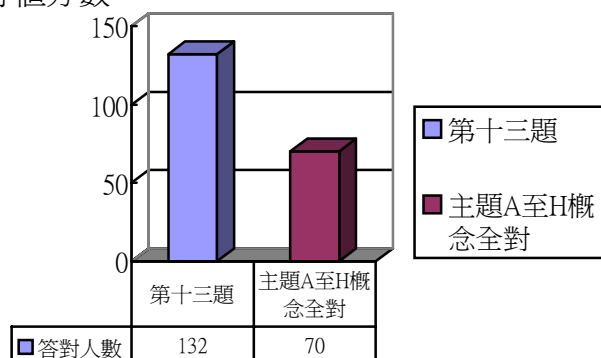


圖 4-3-8 學童在假分數的意義概念正確人數統計圖

第十三題等值分數答對人數為 132 人，從主題 A 至主題 G 累積答對人數為 64 人。此階段至少有一半的學童在前幾個分數主題表現上概念不完整，而且這一題還有一些學童仍以直觀法則來判斷等值分數，顯然是等分割及通分的概念也不完備。

八、分數的乘法

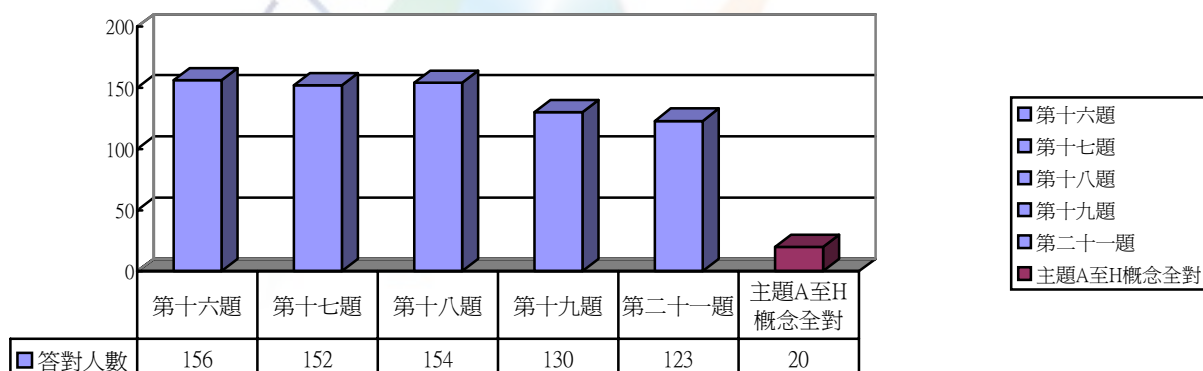


圖 4-3-9 學童在分數乘法概念正確人數統計圖

第十六題、第十七題、第十八題、第十九題、第二十一題的各題答對人數依序分別是 156 人、152 人、154 人、130 人及 123 人，至少都有佔全體人數的六、七成。不過，主題 A 至主題 H 答對累積人數卻只有 19 人，累積答對人數結果是驟降的，此主題是分數運算概念連貫性之關鍵點。研究者發現，很多學童在分數加減運算概念上表現可佳，一旦進入分數乘法概念運算之後就錯誤不少，更有學童以分數加減的概念來進行分數乘法的運算，混淆使用的情形下就是答對率降低，所

以教師在教分數乘法時，應將分數及倍數概念再加以澄清，使學生不至於使用分數加減法則來處理分數乘法的問題。

九、分數的除法

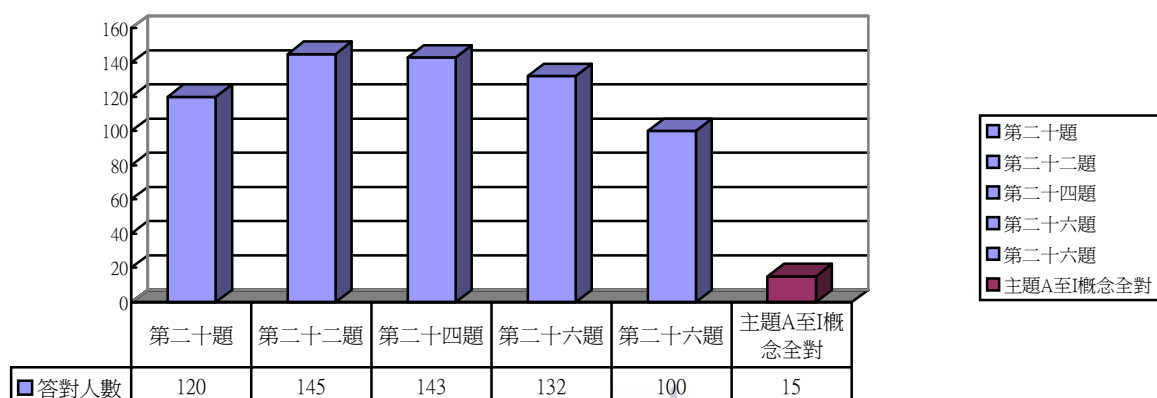


圖 4-3-10 學童在分數除法概念正確人數統計圖

第二十題、第二十二題、第二十四題、第二十五題、第二十六題的各題答對人數依序分別是 120 人、145 人、143 人、132 人、100 人，答對人數又比主題 H 減少許多。主題 A 至主題 I 答對累積人數只剩下 15 人，累積答對人數結果是佔全體學童人數之 7.5%，此主題針對分數運算概念完整性來看也是不可忽視的。研究者發現，很多學童在分數除法運算概念上常誤用倒數，並與分數乘法混淆使用，使得分數除法運算答對率明顯降低。

綜合上述，從研究結果中得知，透過研究者編製的二階段式分數運算評量工具可以檢驗出國小六年級學童在分數運算概念之完整性出現下列關鍵點：分數等分割概念；分數加減法；假分數、等值分數、帶分數；分數乘法；分數除法。以上五大關鍵點是分數概念及運算中每一階層的重要門檻，在進入每一道門之前，教師一定要先檢核學童是否已具備前一項分數概念的基本能力，否則依據每一年級的能力指標檢核之後，擁有完整分數運算概念的學童勢必所剩無幾。以研究者編製之二階段式分數運算評量工具診斷出在五大關鍵點需要做的合理鋪陳包括：等分割概念中在連續量和離散量中透過具體操作強調全體量、部分量的概念；在通分過程中，教師宜注重在分母、分子意義的再度澄清，避免學生自行建構錯誤

的運算方式；等值分數中，由於三年級和五年級等值概念所切入的方式是截然不同，教師切勿在學習之初就要求學童以擴分法則求等值分數，如此一來，學童對於此概念將會是不完備的；帶分數與假分數的意義是息息相關的，教師不宜將分母和分子當作個別的整數來討論，如此將失去分數的意義；在進入分數的乘法之前教師宜先與學童澄清分數與倍數的概念，否則學童過度類化將分數加法與分數乘法混淆使用；分數除法是教學的盲點，教師最容易落入直接告知運算法則的盲點，倒數的正確使用將成為關鍵點。透過具體操作，藉由數學語言完整的傳達更豐富的分數運算學習概念，將是教師們再數學課程中所要努力的一大方向。

參、研究者在分數運算二階段式診斷評量之實作發現

一、學童選答結果特殊組合

研究者自編的分數運算二階段式診斷評量主要是依據現有國小數學課程綱要之分年細目編製而成，由於二階段式診斷評量有別於傳統式的評量，以致於透過這次評量施測後學童的答案中，經由研究者將所有學童答題結果逐一比較核對後意外發現，學童在答案選項及理由選項的搭配之下，答題結果有一些特殊的答案組合，而這些特殊的答案組合正是研究者想要尋找在學童內心隱藏的分數運算概念，以下分別以概念逐一說明：

表4-3-2 學童選答結果特殊組合一覽表

內容	答題組合	選答人數	內容說明
等分的概念	一 (1, 1) → 二 (2, 1) → 三 (2, 1) 或三 (3, 2) 或三 (4, 3) 或三 (3, 5) 或三 (2, 6)	8 人	* 直觀法處理部份全體問題

內容	答題組合	選答人數	內容說明
分數的加法	四 (3.2) → 五 (4.2)	11 人	* 分母通分但分子未處理
	四 (2.1) → 九 (3.1) → 十二 (1.2) → 十四 (3.1) 或十四 (1.5)	7 人	* 直接計算
	九 (4.2) → 十一 (2.2)	23 人	* 分子分母同乘一整數
分數的加減	十五 (4.5) → 二十三 (2.2) 或二十三 (2.4)	25 人	* 通分錯誤：(有通分，但分子不變直接相加減)
帶分數、假分數	十二 (2.1) 或十二 (2.4) 或十二 (3.6) → 十四 (2.3) ↓ 十六 (3.3) 或十六 (2.5) ↓ 十九 (1.1) 或十六 (4.4) ↓ 二十 (2.2) ↓ 二十二 (3.5)	13 人	* 拆成整數再計算
分數的比較大小	(2.1) → 六 (3.5) → 七 (3.5) 或七 (3.2)	7 人	* 直接計算
等值分數	六 (3.3) → 七 (2.1) → 十三 (1.3)	11 人	* 誤以分母大的分數值越大
分數的乘法	十三 (4.4) → 十六 (2.2) → 十八 (1.1)	11 人	* 帶分數乘以整數
	十八 (4.5) → 二十四 (4.6) 或二十四 (3.3)	12 人	* 將被乘數寫成倒數相乘
分數的除法	十九 (3.3) → 二十 (3.6) → 二十一 (4.5) → 二十二 (2.3) → 二十四 (3.1) → 二十五 (1.1)	3 人	直接將除法換成乘法
	二十 (4.2) → 二十一 (1.4) → 二十四 (3.3) 或二十四 (4.6)	27 人	* 被除數寫成倒數相乘
分數的乘除	十七 (2.6) → 十八 (4.5) → 二十 (4.2) 或二十 (2.2) → 二十一 (1.4) → 二十四 (3.3) 或二十四 (4.6) → 二十五 (3.4)	12 人	* 誤將被除數寫成倒數

由以上特殊答案組合清楚呈現顯示，這些選項系統化的呈現代表學童錯誤的

概念是成立的，絕非隨意填答，由此可知透過研究者編製的國小數學二階段式分數運算診斷評量工具是可以作為教師判定學生之概念類型，作為教材準備依據，進行有效教學。

二、評量試題題組間的關聯性

透過叢集分析探討本研究之國小數學二階段式分數運算診斷評量題組間的關聯性，如圖 4-3-11：



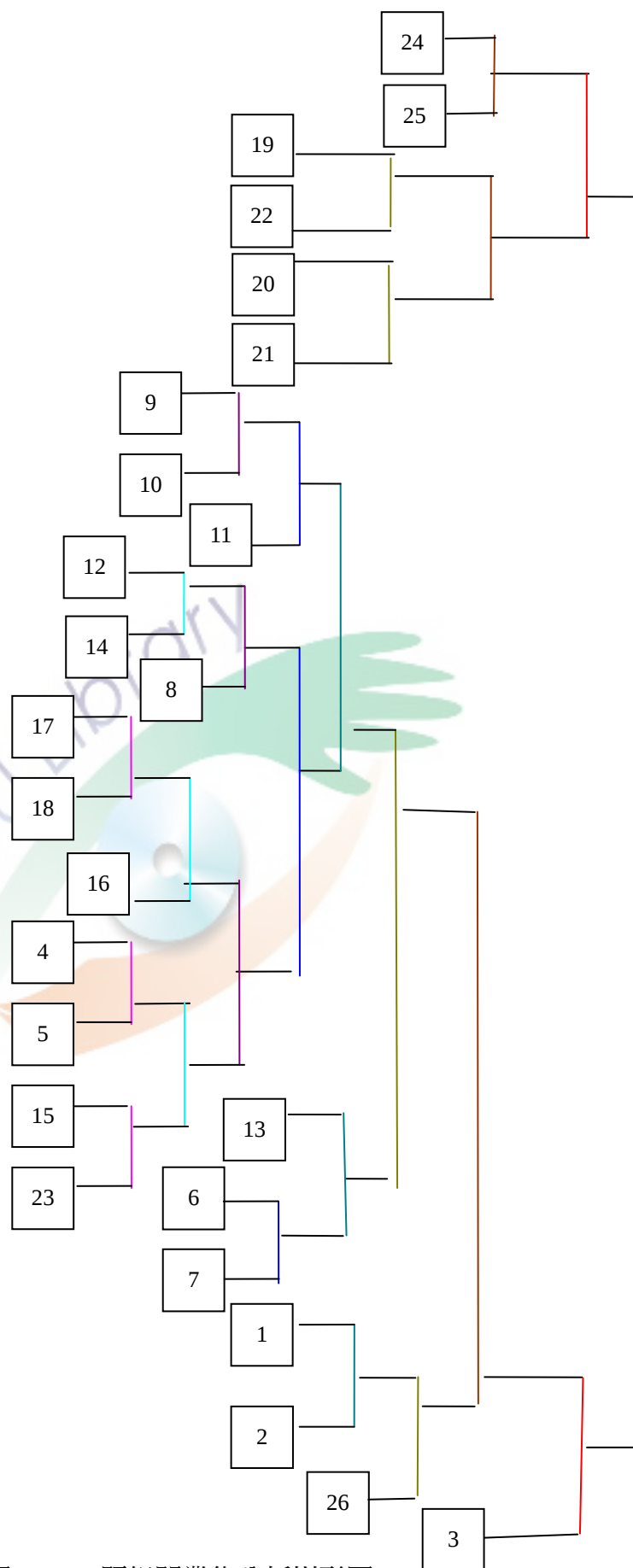


圖 4-3-11 題組間叢集分析樹形圖

由叢集分析結果發現：

(一) 題組間的關聯性

初步分析看出此份題目共分成八個階層：

第一階層中，第十七、十八題相關；第四、五題相關；第十五、二十三題相關。

第二階層中，第十二、十四題相關；第十七、十八題與第十六題相關；第四、五題與第十五、二十三題劃歸為一組。

第三階層中，第十二、十四題與第八題一組；第十七、十八、十六題與第四、五題、第十五、二十三題結為一組。

第四階層中，第九、十、十一與第十二、十四、八、十七、十八、十六、四、五、十五、二十三題合為一組。

第五階層中，(第九、十、十一)、(第十二、十四、八)、(第十七、十八、十六)、(第四、五、十五、二十三題)與(第十三、六、七題)合為一組，此外，第一、二題分為一組。

第六階層中，第五階層的各題劃歸為一叢集；第十九、二十二題和第二十、二十一題劃為一叢集。

第七階層中，第二十四、二十五題和(第十九、二十二、二十、二十一題)成為一叢集；另一叢集是第九、十、十一、十二、十四、八、十七、十八、十六、四、五、十五、二十三、十三、六、七、一、二、二十六等題。

第八階層中，第二十四、二十五、十九、二十二、二十、二十一、九、十、十一、十二、十四、八、十七、十八、十六、四、五、十五、二十三、十三、六、七、一、二、二十六與第三題合為一叢集。越高階層的相關性越弱，題組間的關聯性越低，資料分析結果顯示第三題與其他各題的關連性最低。

(二) 第十七、十八題間及第十六題的關聯性解析：

第十七題 巧虎家有一個長方形的小陽台，長 $\frac{21}{6}$ 公尺，寬 $\frac{18}{7}$ 公尺，求此陽台的面積是多少平方公尺？

第十八題 1 本數學作業簿的厚度是 $\frac{3}{5}$ 公分，請問 20 本數學作業簿疊在一起的厚度是多少？

這兩題答對人數分別為 152 人及 154 人，過程是進行分數乘法運算，不過差別在第十七題是解決假分數乘以假分數的乘法運算，第十八題是在處理真分數乘以整數的乘法運算，一般學生對於分數乘法算則都只是記住公式化的算則，對於運算概念並沒有深入研究，從學童答題結果發現，高分組的學童皆能夠完整的選答出正確的選項，低分組學童會在計算過程因理由選項與自行建構之過程有出入而選答受干擾。換句話說，儘管皆是評量分數的乘法，不過無論假分數乘以假分數的乘法運或真分數乘以整數的乘法運算，除了分子乘分子、分母乘分母的法則外，還要考慮約分的需要與否？兩題皆牽涉到乘法基本算則及約分法則，故相關性高且答對人數也極接近。至於第十六題為帶分數乘以整數的運算，與第七、八題同為分數的乘法運算，學童首先要將帶分數換算成假分數，再進行假分數乘以整數的運算，本題雖然沒有牽涉到約分，不過需處理帶分數的乘法問題，而且乘完之後還需將假分數寫成帶分數形式，有 30 位學童將帶分數中的整數與分數分開處理，是造成錯誤的主因。

（三）第四、五題間的關聯性解析：

第四題 一條繩子長 100 公尺， $\frac{4}{5}$ 條繩子和 $\frac{4}{10}$ 條繩子接起來和幾條繩子一樣長？

第五題 一盒橡皮擦有 12 個，小花買了 $\frac{1}{6}$ 盒，巧虎買了 $\frac{1}{3}$ 盒，請問他們現在共有幾個橡皮擦？

第四題是在連續量的情境中，進行相同單位量，異分母同分子的分數加法；第五題是在離散量的情境中，進行單位分數內容物為多個時，相同單位量異分母同分子的分數加法。從分數值看來同樣是在進行異分母同分子的分數加法算則，

所以其關聯性高，答對人數分別為 153 人及 163 人。此外，這兩題同樣都有 15 人

犯了共同的錯誤，例如第四題理由選項 D： $\frac{4}{5} + \frac{4}{10} = \frac{4+4}{10} = \frac{8}{10}$ 條；

$$\text{第五題理由選項 A：}\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1+1}{6} = \frac{2}{6} \text{ 盒}$$

值得一題的是這兩題皆符合四年級的能力指標 4-n-07，這 15 人之中，有 12 人為重複者，說明第四、五題在概念檢測上關聯性高。

(四) 第十五、二十三題間的關聯性解析：

第十五題 $2\frac{1}{4} - 1\frac{2}{15} + \frac{1}{12} = (\quad)$ ，請算出答案，並選出理由。

第二十三題 $2\frac{1}{3} + (3\frac{11}{12} - 1\frac{3}{4}) = (\quad)$ ，請算出答案，並選出理由。

此兩題都是在進行分數的加減的運算，第十五題符合能力指標 5-n-05，第二十三題符合能力指標 6-n-05。兩題答對人數分別為 169 人及 145 人，在答對人數上有顯著的差別，從 24 人的落差當中，令人質疑的是同樣是先減後加的分數運算照理來說答對人數應該不會差距太大，難道是兩步驟的分數問題是學童解題的困難點？研究者從學童的理由選項發現，在兩步驟帶分數加減時，學童不會考慮分數值而直接將整數與分數拆開計算，選擇此理由的學童居多，代表學童對分數運算的概念會因分數值得複雜化及解題多步驟而影響作答，顯示第十五題及第二十三題具有概念診斷連續性的關聯性，可提供教師教學時的參考。

(五) 第一、二題間的關聯性解析：

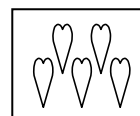
第一題 有 1 塊布平分成 5 等份（如右圖），斜線部份是要用來做抹布，

請問：做抹布是用去全部的多少塊布？



第二題 ♡ 是一張愛心卡，右下圖的愛心卡數量是全部愛心卡數量的 $\frac{1}{5}$ ，

請問全部有幾張愛心卡？



第一題是用分數數詞來描述部分跟全體的分割關係，第二題是知道部分量跟

全體量的關係，求全體量。從題意可清楚發現這兩題是在探討部分與全體的概念，答對人數分別為 162 人及 129 人，不過答對人數落差為 33 人，與研究者個人當初預期相符，原因是第一題可從題目所給的圖形中直接看出全體量，所以第一題答對人數較多。不過，在第二題中，雖然研究者也提供一個圖形給學童參考，但是，在研究者所給予的圖形中，學童可以看到部分量，卻無法看全體量，導致學童無法以直觀法則判斷，此時研究者就是要評量學童對於此部分的真實概念為何？因此足以證明這兩題是有關聯性的。此外，第二十六題題目是： $\frac{5}{7}$ 杯的水，倒出 $\frac{2}{3}$ 公升後，杯子裡還剩下 $\frac{2}{7}$ 公升的水，杯子的容量是多少公升？

正確理由選項是 C：

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{7}\right) \div \frac{5}{7} &= \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{7}\right) \times \frac{7}{5} = \left(\frac{2 \times 7}{3 \times 7} + \frac{2 \times 3}{7 \times 3}\right) \times \frac{7}{5} \\ &= \left(\frac{14}{21} + \frac{6}{21}\right) \times \frac{7}{5} = \frac{20}{21} \times \frac{7}{5} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3} \text{ 公升} \end{aligned}$$

從圖 4-3-11 題組間叢集分析樹形圖發現，第二十六題與第一、二題有關聯性，從第二十六題的理由選項中和學童選答的結果發現，如果學童對於部分與全體的概念不正確，會導致學童在第二十六題誤用解題策略，有 35 位學童選擇錯誤：

理由選項 A： $\frac{5}{7} - \frac{2}{3} + \frac{2}{7} = \frac{5 \times 3}{7 \times 3} - \frac{2 \times 7}{3 \times 7} + \frac{2 \times 3}{7 \times 3} = \frac{15 - 14 + 6}{21} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$ 公升。

從題目與選項間看的出來， $\frac{5}{7}$ 杯的水與倒出的 $\frac{2}{3}$ 公升以及杯子裡還剩下 $\frac{2}{7}$ 公升之間的關係是學童所不解之處，因而使得這一題只有一半的學童答對，其答對預為所有題目中最低。

由此可知，此評量試題由概念發展順續性設計的題目，題組之間具關連性，有利教師判定學生之概念類型，可作為教材準備依據。



第五章 結論與建議

本研究主要目的在於探討國小六年級學童在分數運算學習內容之錯誤概念的類型、以九年一貫課程數學領域綱要為依據，探討國小六年級學童分數運算概念之完整性並發展國小數學二階段式分數運算診斷評量工具，以利教師判定學生之概念類型，作為教材準備依據與教學。

第一節 結論

透過編製國小分數運算之診斷評量工具及施測後，研究者瞭解到國小六年級學童分數運算概念從離散量情境及連續量下進行部份全體的分割關係、等分概念、相同單位量比較大小、不同單位量比較大小、假分數、帶分數、等值分數、分數加減、分數乘除之處理的表現，依據研究的過程與所探討的主題得到以下幾點結論，其敘述如下：

壹、國小六年級學童分數運算概念之表現

（一）部份全體的分割關係、等分概念

在連續量情境之下，有將近 4 成的學生缺乏部份全體的分割關係及等分概念，這些學童大都以為分母的數值就是切割份數，因此不會檢驗切割後每一份是否相等或者僅管題目已告知等分割，仍以直觀法解決相關問題。

（二）相同單位量比較大小、不同單位量比較大小、等值分數

學生會就分數數值比較大小，而忽略單位量和分數的關係。當單位量所指內容物為多個獨立物時，若個數與分母大小相同，學生能完成解題，但當單位量所指內容物個數大於分母時，學童容易受到分母及分子的影響尤其忽略給定的單位量。

（三）分數加減

以直接法進行運算，分母加減分母，分子加減分子。在異分母分數的加減中，

通分的概念在運算過程中常會忽略，分母通分，但分子未處理就直接相加減分數的加法與分數乘法運算混淆使用。在進行通分時，分母與分子沒有同乘以一個整數或兩個異分母分數誤同乘同一個倍數。假分數的加減，誤將假分數中分子的十位數字當作帶分數之整數。帶分數的加減，忽略分數的意義，將所有分數上數字以整數方式個別計算，最後再寫成分數形式。

（四）假分數、帶分數

忽略分子等於分母的假分數。誤認為只要是分子不等於分母的分數即是假分數。假分數化成帶分數概念不清，誤將假分數中分子的十位數字當作帶分數之整數。整數和分數分開運算以及分配律的錯誤用。

（五）分數乘除

在進行擴分時的乘法運算，學童認為分數乘以某數也是必須將分母和分子同時乘以某數，再進行運算。由於分數的除法運算比分數的乘法運算複雜，所以學童常會與分數乘法運算規則混淆不清而誤用。特別是當帶分數化成倒數的計算，學童因為常常將運算概念只停留在帶分數與假分數的互換，所以直接將除法換成乘法，忽略要乘上除數的倒數，以至於遺忘進行倒數的處理。

貳、學生在分數運算的錯誤類型

根據大多數學童所選擇的錯誤理由選項，研究者發現六年級學童在分數運算概念中有以下錯誤類型：（一）部分、全體分割關係及等分概念的錯誤類型（二）單位量概念的錯誤類型（三）等值分數、帶分數及假分數概念的錯誤類型（四）未能理解語句之間的關係及意義（五）分數加減法運算法則錯誤（六）分數乘除法中數概念過度類化、運算法則錯誤。

參、國小六年級學童分數運算概念之完整性

從研究結果中得知，在主題 A 階段有 6 成的學童是具有等分割概念，顯然基礎分數概念的初階即有將近 4 成的學童並不完整的具備等分割概念，到了主題 B 剩下 4 成學童的分數概念及表現仍是持續且完整的。在進入五年級分數運算概念

階段時，還有 3 成的學童保有完整的分數運算概念，令人擔憂的是進入五年級階段的主題 H：分數乘法運算的評量中，不到 2 成的學童表現是穩定的，分數的除法運算僅僅只有剩下 1 成的學童概念呈現完整性。學童在國小數學分數運算概念的表現是令人憂心的，在目前數學領域課程學習中，依據各年級分年細目在進入每一個概念之前，教師一定要先檢核學童是否已具備前一項分數概念的基本能力，在初階簡單概念只要無法通過評量，勢必在之後學習分數運算的過程中會無法建立完備的解題能力，從研究中結果得知，許多學童在分數運算的概念是零碎且不連貫的，擁有完整分數運算概念的學童的確所剩無幾。透過具體操作，藉由數學語言完整的傳達更豐富的分數運算學習概念，將是教師們再數學課程中所要努力的一大方向。

肆、國小數學二階段式分數運算診斷評量工具，用於診斷國小分數運算之發現

透過研究者編製的二階段式分數運算評量工具可以檢驗出國小六年級學童在分數運算概念之完整性出現下列關鍵點的表現：分數等分割概念；分數加減法；假分數、等值分數、帶分數；分數乘法；分數除法。以研究者編製之二階段式分數運算評量工具診斷出在五大關鍵點需要做的合理鋪陳包括：等分割概念中在連續量和離散量中透過具體操作強調全體量、部分量的概念；在通分過程中，教師宜注重在分母、分子意義的再度澄清，避免學生自行建構錯誤的運算方式；等值分數中，由於三年級和五年級等值概念所切入的方式是截然不同，教師切勿在學習之初就要求學童以擴分法則求等值分數，如此一來，學童對於此概念將會是不完備的；帶分數與假分數的意義是息息相關的，教師不宜將分母和分子當作個別的整數來討論，如此將失去分數的意義；在進入分數的乘法之前教師宜先與學童澄清分數與倍數的概念，否則學童過度類化將分數加法與分數乘法混淆使用；分數除法的教學，教師們最容易落入直接告知運算法則的盲點，倒數的正確使用將成為關鍵點。研究者發現國小數學二階段式分數運算診斷評量工具，用於診斷國小學童分數運算之學習狀況，對是一個非常有利的工具，不僅可以瞭解學童現階

段各分數主題概念發展，更可以透過答案選項及理由選項來映證所具備的概念是否完備！

第二節 建議

壹、對教師的建議～教學方面

- 一、在分數概念方面，在進行分數教學時，教師應呈現更多元的表徵，在概念建立後，協助學童提昇至抽象情境，以便正確的解決分數運算問題。
- 二、本研究發現，學生語文程度將攸關此評量作答之結果，本評量試題為使學童瞭解題意及選項內容，盡量運用在前導性測驗中所蒐集到的學童常用詞語來呈現內容，希望能提高學生答題效率。經過施測過程研究者發現研究對象雖為六年級學童，但在語文表達及語意表現上仍有待加強，因此建議教師盡量鼓勵學童多用數學語言進行溝通與討論，對於分數文字題的解讀有正向的提昇。

貳、對後續研究的建議～評量方面

- 一、因考量學童的答題思考歷程，本評量施測時間為六十分鐘，設計二十七題的題目。在編製具有良好信度之「國小高年級學童分數二階段式診斷評量試卷」中，其施測時間的考慮應更周延。
- 二、將「國小高年級學童分數二階段式診斷評量試卷」轉為線上評量，可增進資料蒐集及處理的效率及誤差。

參考文獻

一、中文部分

- 吳相儒（2001）。運用國小數學科「分數」教學模組實施診斷與補救教學之研究——以國小四年級學童為例。國立嘉義大學國民研究所碩士論文，未出版，嘉義縣。
- 吳訓生（2003）。國小六年級數學學習困難學生因數倍數問題解題之研究。國立彰化師範大學特殊教育學系特殊教育行政碩士班碩士論文，未出版，彰化縣。
- 呂溪木（1985）。從國際科展看我國今後科學教育發展的方向。科學教育月刊，64，13-19。
- 李浩然（2002）。高雄市國一學生分數乘除法運算錯誤類型之分析研究。國立高雄師範大學數學系研究所碩士論文，未出版，高雄市。
- 林彥宏（2002）。國小五年級學童分數概念的補救與診斷。國立臺南師範學院教師在職進修數學碩士學位班碩士論文，未出版，臺南縣。
- 林佩君（2005）。概念圖合作學習對國中生數學學習成效之研究-以「一元一次方程式」單元為例。國立高雄師範大學數學系研究所碩士論文，未出版，高雄市。
- 邱明星（2006）。二階段式數學迷思概念診斷工具的發展與應用。檢索日期：2006.08.10。取自網路社會學通訊期刊：<http://www.nhu.edu.tw/~society/e-j.htm>
- 邱慧珍（2002）。國小學童倍數解題與迷思概念之研究。國立屏東師範學院數理教育研究所碩士論文，未出版，屏東縣。
- 柳賢（2001）。數學科概念評核工具之開發與應用。載於梁淑坤（編）。《評核與數學教育—「數學課程全面檢討：之後又如何？」研討會跟進文集》。香港：香港中文大學課程與教學學系及香港數學教育學會，87-91。
- 洪淑君、黃淑君、楊禮綾（2006）。64年、82年、90年、92年數學課程教材綱要之比較。檢索日期：2006.06.05。取自 K12 數位學校：
<http://ds.k12.edu.tw/learn/index.php>
- 洪瑞盈（2006）。以網路評量系統進行診斷評量以實施補救教學之研究：以整數加減法單元為例。國立彰化師範大學/科學教育研究所碩士論文，未出版，嘉義縣。
- 孫碧霞（2004）。多媒體電腦輔助教學對國小學習障礙學生分數概念學習成效之研究。國立台東大學教育研究所特殊教育碩士專班碩士論文，未出版，台東縣。
- 張英傑、周菊美合譯（2005）。John A. Van De Walle（2001）原著。中小學數學科教材教法。Elementary and middle school mathematics,teaching developmentally,4th ed.。台北市，五南出版社，頁 465—491。
- 張慶勳（2005）。論文寫作手冊。台北市，心理出版社。
- 教育部（2001）。國民中小學教育九年一貫課程暫行綱要。台北：教育部。
- 教育部（2003）。國民中小學教育九年一貫課程綱要數學學習領域。台北：教育部。
- 教育部台灣省國民教師研習會（2001）。國小數學教材分析—分數的術概念與運算。臺北縣：教育部台灣省國民教師研習會。

- 梁惠晴（2006）。**概念圖合作學習對高中生數學學習成效研究－以「排列組合」單元為例**。國立高雄師範大學數學系研究所碩士論文，未出版，高雄市。
- 郭昇欣（2005）。**國小六年級學童分數二階段評量診斷工具之發展研究**。國立臺南大學教育經營與管理研究所數學科教學碩士班碩士論文，未出版，臺南縣。
- 陳忠雄（2002）。**高中學生三角函數概念學習錯誤類型研究**。國立高雄師範大學數學系研究所碩士論文，未出版，高雄市。
- 陳俊廷（2002）。**高中學生空間向量學習困難的診斷測驗工具發展研究**。國立高雄師範大學數學系研究所碩士論文，未出版，高雄市。
- 陳建蒼（2000）。**高一學生對數函數概念層次教學成效研究**。國立高雄師範大學數學系研究所碩士論文，未出版，高雄市。
- 陸昱任（2004）。**論數學素養之意涵及小學階段評量工具之開發**。國立臺灣師範大學科學教育研究所碩士論文，未出版，台北市。
- 曾靖雯（2003）。**以表徵觀點看國小三年級分數教學之行動研究**。國立台東師範學院教育研究所碩士論文，未出版，台東縣。
- 黃金鐘（1987）。**國小數學診斷與補救教學。台灣區師專數理科學術研討會**。台北師專。
- 黃敏晃、林文生、鄔瑞香（2001）。**數學教育的藝術與實務－另類教與學**。台北市：心理出版社，頁 231。
- 黃寶彰（2003）。**六、七年級學童數學學習困難之研究**。國立屏東師範學院數理教育研究所碩士論文，未出版，屏東縣。
- 黃馨緯（1995）。**國小高年級學童分數數線表示法瞭解之研究**。國立台中師範學院教育研究所碩士論文，未出版，台中縣。
- 黃權貴（2002）。**國小六年級學童異分母分數合成之解題研究**。國立台中師範學院國民教育研究所碩士論文，未出版，台中縣。
- 楊壬孝（1989）。**國中小學生分數概念的發展**。行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告（編號：NSC-78-0111-s-003-06A）。執行單位：國立臺灣師範大學數學系。
- 楊孟麗、謝水南合譯（2003）。Jack R Fraenkel, Norman E. Waiien（2000）原著。**教育研究法－研究設計與實務**。How to Design & Evaluate Research in Education。台北市，心理出版社，頁 241。
- 楊淑雯（2005）。**概念圖合作學習對國三學生數學學習成效之研究～以「與弧有關的角」為例**。國立高雄師範大學數學系研究所碩士論文，未出版，高雄市。
- 劉秋木（2004）。**國小數學科教學研究（八版）**。台北市，五南圖書出版公司。
- 蔡麗蓉（2003）。**國小數學科審定本教科書分數教材之內容分析**。國立台中師範學院國民教育研究所碩士論文，未出版，台中縣。
- 蕭志芳（2002）。**中高年級國小學童時間概念之探究**。國立台北師範學院數理教育研究所碩士論文，未出版，台北市。
- 賴潔芳（2003）。**二階段評量應用在高中生三角函數學習成效之研究**。國立高雄師範大學數學系研究所碩士論文，未出版，高雄市。

- 謝如山、謝明起、謝明娟譯（2002）。**數學科教材教法**。台北，五南圖書出版公司。
- 顏素霞（2003）。**國小教師數學教學信念及其教學評估之研究：以高年級學童分數概念學習表現為例**。國立屏東師範學院教育心理與輔導研究所碩士論文，未出版，屏東縣。
- 龐嘉芬（2002）。**國小高年級學童分數概念與能力之研究**。國立屏東師範學院教育心理與輔導研究所碩士論文，未出版，屏東縣。
- 蘇慧娟（1998）。**高雄地區國二學生方根概念及運算錯誤類型分析之研究**。國立高雄師範大學/數學教育研究所碩士論文，未出版，高雄市。

二、英文部分

- Booth, R.L.(1988).Children's difficulties in beginning algebra. In A.E. Coxford and A.P. Shulte(eds). *The ideas of algebra, K-12. 1988 Yearbook*. The National Council of Teachers of Mathematic Virginia, U.S.A. 20-32.
- Education Studies in Mathematics*,17(1),49-66.
- Hunting, R. P. (1988). Rachel's schemes for constructing fraction knowledge.
- Maurer, S.B.(1987). New knowledge about errors and new views about Learners: What they mean to educations and more educators would like to know. In A.H. Schoenfeld(Ed.), *Cognitive science and mathematics education*, 165-187.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000).*The principles and standards for school mathematics* . reston, VA:NCTM.
- Odom, A. L., & Barrow, L. H. (1995). Development and application of a two-tier diagnostic test measuring college biology students' understanding of diffusion and osmosis after a course of instruction. *Journal of Reseach in Science Teaching*, 32(1), 45-61.
- Treagust,D.F. (1988) .Development and use of diagnostic tests to evaluate students' misconceptions in science. *International Journal of Science Education*,10 (2) ,159-169.
- Treagust,D.F. (1995) .Diagnostic assessment of students' science knowledge. In S. Glynn & R. Duit(Eds.). *Learning Science in the Schools: Research Reforming Practice*. Mahwsh: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. 1995..
- Treagust, D. F. (1997). *Diagnostic assessment of students' science knowledge*. Paper presented at the 1997 International workshop on student's concept development, understanding diagnosis and teaching. Feb. 17-20, Taipei.

附錄一 國小分數運算二階段式診斷評量試題

國小分數運算二階段式診斷評量試題

第一題 有 1 塊布平分成 5 等份（如右圖），斜線部份是要用來做抹布，
請問：做抹布是用去全部的多少塊布？



答案是：() ① $\frac{1}{5}$ 塊布 ② $\frac{2}{5}$ 塊布 ③ 1 塊布 ④ 2 塊布

理由是：() 【A】以全部減掉斜線部份： $\frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$ ，所以是 $\frac{1}{5}$ 塊布。

【B】1 等份加上 1 等份合起來等於 1 塊布。

【C】 $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ ，所以是 2 塊布。

【D】斜線部分是全部的其中 2 等份，也就是 2 塊布。

【E】以全部減掉斜線部份： $\frac{1}{5}$ 的 5 倍減掉 $\frac{1}{5}$ 的 3 倍，得到 $\frac{1}{5}$ 的 2 倍，
所以是 $\frac{2}{5}$ 塊布。

【F】1 等份等於 $\frac{1}{5}$ 塊布，2 個 1 等份還是 $\frac{1}{5}$ 塊布。

第二題 ♡ 是一張愛心卡，右下圖的愛心卡數量是全部愛心卡數量的 $\frac{1}{5}$ ，

請問全部有幾張愛心卡？

答案是：() ① $\frac{1}{5}$ 張 ② 1 張 ③ 5 張 ④ 25 張



理由是：() 【A】5 張中的其中 1 張是全部的 $\frac{1}{5}$ ，所以全部是 5 張。

【B】5 張愛心卡是全部的 $\frac{1}{5}$ ，因為 $\frac{1}{5}$ 的 5 倍等於全部，所以全部是 1 張。

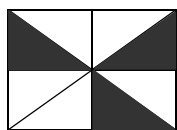
【C】圖中愛心卡數量原本有全部的 $\frac{1}{5}$ ，所以愛心卡是 5 張的 $\frac{1}{5}$ 倍，
所以全部是 1 張。

【D】5 張是全部的 $\frac{1}{5}$ ，要有全部的愛心卡就要 5 張的 5 倍，所以全部是 25 張。

【E】一張愛心卡是全部愛心卡數量的 5 倍，所以全部是 $\frac{1}{5}$ 張。

【F】一張愛心卡數量的 25 倍是 25 張愛心卡，所以全部是 25 張。

第三題 下圖是 2 個一樣大的長方形蛋糕，每個長方形蛋糕都平分成 8 等份，巧虎和小花各選圖中黑色的 3 份蛋糕來吃，請問下列何者正確？



(巧虎)



(小花)

答案是：() ①兩人吃得一樣多 ②巧虎吃得多

③小花吃得多 ④兩人吃的蛋糕大小無法比較。

理由是：() 【A】吃 2 等份的三角形蛋糕合起來會等於小花吃的著色部分的蛋糕，所以 3 等份的三角形蛋糕合起來會大於小花吃的著色部分的蛋糕，所以巧虎多吃 1 等份三角形蛋糕，巧虎吃得多。

【B】同樣將蛋糕分成是 8 等份，但因為三角形蛋糕看起來比長方形蛋糕小，所以小花吃得多。

【C】巧虎吃的是切成三角形的蛋糕，小花吃的是切成長方形的蛋糕，所以兩人吃的蛋糕大小無法比較。

【D】兩個蛋糕一樣大，也都平分成 8 等份，巧虎和小花兩個人都同樣拿了其中的 3 等份，所以兩人吃得一樣多。

【E】小花吃 1 等份的長方形蛋糕等於吃 2 等份的三角形蛋糕，吃 3 等份的長方形蛋糕會等於吃 6 等份的三角形蛋糕，所以小花吃得多。

【F】巧虎吃 2 等份的蛋糕會大於小花吃 1 等份的蛋糕，所以巧虎吃 3 等份的蛋糕會比小花吃 3 等份的蛋糕還多，巧虎吃得多。

第四題 一條繩子長 100 公尺， $\frac{4}{5}$ 條繩子和 $\frac{4}{10}$ 條繩子接起來和幾條繩子一樣長？

答案是：() ① $\frac{8}{10}$ 條 ② $\frac{8}{15}$ 條 ③ $\frac{12}{10}$ 條 ④ 1 條

理由是：() 【A】 $\frac{4}{5} + \frac{4}{10} = \frac{4+4}{5+10} = \frac{8}{15}$ 條

【B】 $\frac{4}{5} + \frac{4}{10} = 8 + 4 = \frac{12}{10}$ 條

【C】 $\frac{4}{5} + \frac{4}{10} = \frac{8}{10} + \frac{2}{5} = \frac{10}{10} = 1$ 條

【D】 $\frac{4}{5} + \frac{4}{10} = \frac{4+4}{10} = \frac{8}{10}$ 條

【E】 $\frac{4}{5}$ 條繩子和 $\frac{4}{10}$ 條繩子合起來就是 1 條繩子

【F】 $\frac{4}{5} + \frac{4}{10} = \frac{8}{10} + \frac{4}{10} = \frac{12}{10}$ 條

第五題 一盒橡皮擦有 12 個，小花買了 $\frac{1}{6}$ 盒，巧虎買了 $\frac{1}{3}$ 盒，請問他們現在共有幾個橡皮擦？

答案是：() ①2 個 ②3 個 ③4 個 ④6 個

理由是：() 【A】 $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1+1}{6} = \frac{2}{6}$ 盒， $12 \div 6 = 2$ ， $2 \times 2 = 4$ 個

【B】 $\frac{1}{6} = 2$ ， $\frac{1}{3} = 4$ ， $2 + 4 = 6$ 個

【C】 $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ， $12 \times \frac{1}{2} = 6$ 個

【D】 $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1+1}{6} = \frac{2}{6}$ 盒 = 2 個

【E】 $12 \times \frac{1}{6} = 2$ ， $12 \times \frac{1}{3} = 4$ ， $2 + 4 = 6$ 個

【F】 $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 盒 = 3 個

第六題 有 1 個蛋糕，小花吃了 $\frac{4}{10}$ 個蛋糕，巧虎吃了 $\frac{8}{20}$ 個蛋糕，下列何者正確？

答案是：() ①兩人吃一樣多 ②小花吃得多 ③巧虎吃得多 ④兩人吃的蛋糕大小無法比較

理由是：() 【A】 $\frac{8}{20} - \frac{4}{10} = \frac{8}{20} - \frac{4}{20} = \frac{8-4}{20} = \frac{4}{20}$ ， $\frac{8}{20} > \frac{4}{10}$ ，所以巧虎吃得多。

【B】 $\frac{4}{10} - \frac{8}{20} = \frac{8}{20} - \frac{8}{20} = 0$ ， $\frac{4}{10} = \frac{8}{20}$ ，所以兩人吃一樣多。

【C】 分母 $20 > 10$ 且分子 $8 > 4$ ，得知 $\frac{8}{20} > \frac{4}{10}$ ，所以巧虎吃得多。

【D】 因為分母不同，所以兩人吃的蛋糕大小無法比較。

【E】 $\frac{8}{20} - \frac{4}{10} = \frac{4}{10}$ ， $\frac{8}{20} > \frac{4}{10}$ ，所以巧虎吃得多。

【F】 $\frac{4}{10} - \frac{8}{20} = \frac{4 \times 8}{10 \times 2} - \frac{8}{20} = \frac{24}{20}$ ，得知 $\frac{4}{10} > \frac{8}{20}$ ，所以小花吃得多。

第七題 有 1 個披薩，小花吃 $\frac{2}{5}$ 個披薩，巧虎吃 $\frac{2}{15}$ 個披薩，請問下列何者正確？

答案是：() ①小花吃的披薩比較多 ②巧虎吃的披薩比較多
③兩人吃的披薩一樣多 ④兩人吃的披薩數量無法比較

理由是：() **【A】** 分子相同，分母不同，因為分母 15 的分數比分母 5 的分數大，所以巧虎吃的披薩較多。

【B】 因為 $\frac{2}{5}$ 與 $\frac{2}{15}$ 不同，無法比較分數的大小，所以兩人吃的披薩數量無法比較。

【C】 $\frac{2}{5} \times 5 = \frac{2}{1} = \frac{6}{3}$ ， $\frac{2}{15} \times 5 = \frac{1}{3}$ ， $\frac{6}{3}$ 比 $\frac{1}{3}$ 大，所以小花吃得多。

【D】 $\frac{2}{5} \times 3 = \frac{6}{15}$ ， $\frac{6}{15} > \frac{2}{15}$ ，所以小花吃的披薩比較多。

【E】 $\frac{2}{15} - \frac{2}{5} = \frac{0}{10} = 0$ ，所以兩人吃的披薩一樣多。

【F】 小花吃 $\frac{2}{5}$ 個披薩， $\frac{2}{5} = \frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{6}{15}$ ，巧虎吃了 $\frac{2}{15}$ ， $\frac{6}{15} > \frac{2}{15}$ ，所以小花吃得多。

第八題 媽媽買了 1 盒餅乾有 24 個，小花吃了 $\frac{5}{12}$ 盒餅乾，巧虎吃了 $\frac{4}{12}$ 盒餅乾，請問下列何者正確？

答案是：() ①巧虎吃的餅乾比較多 ②小花吃的餅乾比較多
③兩人吃的餅乾一樣多 ④兩人吃的餅乾數量無法比較

理由是：() **【A】** 分母一樣，所以兩人吃的餅乾一樣多。

【B】 $\frac{5}{12} - \frac{4}{12} = \frac{1}{12} > 0$ ，所以兩人吃的餅乾一樣多。

【C】 分母都是 12，分子較小的分數較小， $\frac{5}{12} > \frac{4}{12}$ ，

所以小花吃的餅乾比較多。

【D】 分母一樣，分子較小的分數較大，所以巧虎吃的餅乾比較多。

【E】 不必考慮分母是否相同，因為分子 5 比分子 4 大，所以小花吃的餅乾比較多。

【F】 因為 $\frac{5}{12}$ 和 $\frac{4}{12}$ 的分子不同，所以兩人吃的餅乾數量無法比較

第九題 家裡有 2 條金沙巧克力，每條有 6 顆，小花吃了 $\frac{4}{6}$ 條金沙巧克力，

巧虎吃了 $\frac{5}{6}$ 條金沙巧克力，請問兩人共吃了幾顆金沙巧克力？

答案是：() ① $\frac{18}{24}$ 顆 ②3 顆 ③9 顆 ④18 顆

理由是：() 【A】 $\frac{4}{6} + \frac{5}{6} = \frac{9}{12}$ ， $6 \times 2 = 12$ ， $\frac{9}{12} \times 12 = 9$ 顆

【B】 $\frac{4}{6} \times 2 = 8$ ， $\frac{5}{6} \times 2 = 10$ ， $8 + 10 = 18$ 顆

【C】一條 6 顆， $\frac{4}{6}$ 條 $= 6 \times \frac{4}{6} = 4$ 顆； $\frac{5}{6}$ 顆 $= 6 \times \frac{5}{6} = 5$ 顆， $4 + 5 = 9$ 顆

【D】 $\frac{4}{6} + \frac{5}{6} = \frac{9}{6}$ ， $6 \times 2 = 12$ ， $\frac{9}{6} \times 12 = 18$ 顆

【E】 $\frac{4}{6} \times 2 = \frac{8}{12}$ ， $\frac{5}{6} \times 2 = \frac{10}{12}$ ， $\frac{8}{12} + \frac{10}{12} = \frac{18}{24}$ 顆

【F】 $\frac{4}{6} \times 2 = \frac{4}{3}$ ， $\frac{5}{6} \times 2 = \frac{5}{3}$ ， $\frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{9}{3}$ 顆 $= 3$ 顆

第十題 冰箱有一罐牛奶 $\frac{8}{9}$ 公升，早上巧虎喝了 $\frac{3}{9}$ 公升，下午又喝了相同的份量，

請問冰箱的牛奶還剩下多少？

答案是：() ① $\frac{2}{9}$ 公升 ② $\frac{3}{9}$ 公升 ③ $\frac{5}{9}$ 公升 ④ $\frac{6}{9}$ 公升

理由是：() 【A】 $\frac{8}{9} - \frac{3}{9} = \frac{5}{9}$

【B】 $\frac{3}{9} \times 2 = \frac{6}{18}$ ， $\frac{6}{18} - \frac{3}{9} = \frac{3}{9}$

【C】 $\frac{8}{9} - \frac{3}{9} - \frac{3}{9} = 8 - 3 - 3 = \frac{2}{9}$

【D】 $\frac{6}{9} - \frac{3}{9} = \frac{3}{9}$

【E】 $\frac{3}{9} + \frac{3}{9} = \frac{6}{9}$

【F】 $\frac{3}{9} \times 2 = \frac{6}{9}$ ， $\frac{8}{9} - \frac{6}{9} = \frac{2}{9}$

第十一題 請問下列哪一個選項中的分數都是假分數？

答案是：() ① $\frac{5}{7}$ 、 $\frac{6}{7}$ 、 $\frac{8}{7}$ 、 $\frac{9}{7}$ 、 $\frac{10}{7}$ 、 $\frac{11}{7}$ ② $\frac{7}{7}$ 、 $\frac{8}{7}$ 、 $\frac{9}{7}$ 、 $\frac{10}{7}$ 、 $\frac{11}{7}$ 、 $\frac{12}{7}$
③ $\frac{7}{6}$ 、 $\frac{7}{8}$ 、 $\frac{7}{9}$ 、 $\frac{7}{10}$ 、 $\frac{7}{11}$ 、 $\frac{7}{12}$ ④ $\frac{15}{7}$ 、 $\frac{13}{7}$ 、 $\frac{11}{7}$ 、 $\frac{9}{7}$ 、 $\frac{7}{7}$ 、 $\frac{5}{7}$

理由是：() 【A】 分子大於分母或分子等於分母的分數。
【B】 只有分子大於分母的分數。
【C】 只有分子等於分母的分數。
【D】 分子大於分母但分子不等於分母的分數。
【E】 分子小於分母的分數。
【F】 分子不等於分母的分數

第十二題 12 枝鉛筆裝成一盒，文具店賣掉 $\frac{5}{4}$ 盒後，還剩下 $\frac{23}{4}$ 盒，
請問文具店原有幾盒鉛筆？

答案是：() ① $3\frac{1}{2}$ 盒 ② 4 盒 ③ 5 盒 ④ 7 盒

理由是：() 【A】 $\frac{23}{4} + \frac{5}{4} = 2\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = 2\frac{8}{4} = 2 + 2 = 4$
【B】 $\frac{5}{4} + \frac{23}{4} = \frac{23+5}{8} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$
【C】 $\frac{5}{4} + \frac{23}{4} = \frac{23+5}{4} = \frac{28}{4} = 7$
【D】 $\frac{23}{4} + \frac{5}{4} = 2\frac{3}{4} + 1\frac{1}{4} = 3\frac{4}{4} = 3 + 1 = 4$
【E】 $12 - \frac{5}{4} - \frac{23}{4} = 12 - \frac{28}{4} = 12 - 7 = 5$
【F】 $\frac{5}{4} + \frac{23}{4} = \frac{28}{4} = 2\frac{8}{4} = 3 + 2 = 5$

第十三題 下列分數中，分數值都大於 $\frac{1}{4}$ ，且小於 $\frac{1}{2}$ 的是哪一個選項？

答案是：() ① $\frac{1}{6}$ 、 $\frac{1}{7}$ 、 $\frac{1}{8}$ 、 $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{4}$ 、 $\frac{3}{4}$ 、 $\frac{4}{4}$
③ $\frac{6}{20}$ 、 $\frac{7}{20}$ 、 $\frac{8}{20}$ 、 $\frac{9}{20}$ ④ $\frac{5}{20}$ 、 $\frac{6}{20}$ 、 $\frac{7}{20}$ 、 $\frac{8}{20}$ 、 $\frac{9}{20}$ 、 $\frac{10}{20}$

理由是：() 【A】 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ，所以 $\frac{2}{4}$ 、 $\frac{3}{4}$ 、 $\frac{4}{4}$ 都大於 $\frac{1}{4}$ 。

【B】 $\frac{1}{4} = \frac{5}{20}$ ， $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ ， $\frac{6}{20} > \frac{1}{4}$ ， $\frac{9}{20} < \frac{1}{2}$ 所以 $\frac{6}{20}$ 、 $\frac{7}{20}$ 、 $\frac{8}{20}$ 、 $\frac{9}{20}$ 值都大於 $\frac{1}{4}$ ，而且小於 $\frac{1}{2}$ 。

【C】因為分母越大的分數值越大，所以 $\frac{1}{6}$ 、 $\frac{1}{7}$ 、 $\frac{1}{8}$ 、 $\frac{1}{9}$ 都大於 $\frac{1}{4}$ 。

【D】 $\frac{1}{2} \times 2 = \frac{2}{4}$ ，選項④的分數乘以5都大於 $\frac{1}{4}$ 且小於 $\frac{2}{4}$ 。

【E】因為分數值都要大於 $\frac{1}{4}$ 且小於 $\frac{1}{2}$ ，只要分數值大於 $\frac{1}{8}$ 即可。

【F】分數值大於 $\frac{1}{4}$ 的分數都會小於分數值等於 $\frac{1}{2}$ 的分數。

第十四題 小花今天上午讀了 $2\frac{1}{4}$ 小時的書，下午讀了 $1\frac{2}{3}$ 小時的書，

請問小花今天共用了多少時間看書？

答案是：() ① 2 ② $3\frac{3}{4}$ ③ $3\frac{3}{7}$ ④ $3\frac{11}{12}$

理由是：() 【A】 $2\frac{1}{4} + 1\frac{2}{3} = 3\frac{3}{7}$

【B】 $2\frac{1}{4} + 1\frac{2}{3} = \frac{9}{4} + \frac{5}{3} = \frac{27}{12} + \frac{20}{12} = \frac{47}{12} = 3\frac{11}{12}$

【C】 $2\frac{1}{4} + 1\frac{2}{3} = (2+1) + (1+2) + (4+3) = 3\frac{3}{4}$

【D】 $2\frac{1}{4} + 1\frac{2}{3} = 2\frac{1}{12} + 1\frac{5}{12} = 3\frac{6}{12} = 3\frac{3}{4}$

【E】 $2\frac{1}{4} + 1\frac{2}{3} = \frac{9}{4} + \frac{5}{3} = \frac{14}{7} = 2$

【F】 $2\frac{1}{4} + 1\frac{2}{3} = 2\frac{3}{12} + 1\frac{6}{12} = 3\frac{9}{12} = 3\frac{3}{4}$

第十五題 $2\frac{1}{4} - 1\frac{2}{15} + \frac{1}{12} = (\quad)$ ，請算出答案，並選出理由。

答案是：() ① $1\frac{1}{5}$ ② $1\frac{4}{15}$ ③ $1\frac{2}{23}$ ④ $1\frac{1}{30}$

理由是：() **【A】** $2\frac{1}{4} - 1\frac{2}{15} + \frac{1}{12} = \frac{9}{4} - \frac{17}{15} + \frac{1}{12} = \frac{150}{60} - \frac{64}{60} + \frac{5}{60} = 1\frac{16}{60} = 1\frac{4}{15}$

$$\begin{aligned} \text{【B】 } 2\frac{1}{4} - 1\frac{2}{15} + \frac{1}{12} &= 2\frac{1}{4} - 1\frac{2 \times 2}{15 \times 12} + \frac{1 \times 15}{12 \times 15} = 2\frac{1}{4} - 1\frac{24}{180} + \frac{15}{180} \\ &= 2\frac{1}{4} - 1\frac{39}{180} = 2\frac{1}{4} - 1\frac{13}{60} = 2\frac{1 \times 15}{4 \times 15} - 1\frac{13}{60} = 2\frac{15}{60} - 1\frac{13}{60} = \end{aligned}$$

$$1\frac{2}{60} = 1\frac{1}{30}$$

$$\text{【C】 } 2\frac{1}{4} - 1\frac{2}{15} + \frac{1}{12} = 1\frac{2}{23}$$

$$\begin{aligned} \text{【D】 } 2\frac{1}{4} - 1\frac{2}{15} + \frac{1}{12} &= 2\frac{1}{4} - 1\frac{2}{15} + \frac{1}{12} = 2\frac{15}{60} - 1\frac{8}{60} + \frac{5}{60} \\ &= 1\frac{7}{60} + \frac{5}{60} = 1\frac{12}{60} = 1\frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\text{【E】 } 2\frac{1}{4} - 1\frac{2}{15} + \frac{1}{12} = 2\frac{1}{60} - 1\frac{2}{60} + \frac{1}{60} = \frac{1}{60} + \frac{1}{60} = 1\frac{2}{60} = 1\frac{1}{30}$$

$$\begin{aligned} \text{【F】 } 2\frac{1}{4} - 1\frac{2}{15} + \frac{1}{12} &= (2-1) + \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{15} + \frac{1}{12}\right) \\ &= 1 + \frac{15-8+5}{60} = 1 + \frac{12}{60} = 1 + \frac{4}{15} = 1\frac{4}{15} \end{aligned}$$

第十六題 $1\frac{3}{5} \times 7 = (\quad)$ ，請算出答案，並寫出理由。

答案是：() ① $1\frac{3}{5}$ ② $7\frac{3}{5}$ ③ $8\frac{3}{5}$ ④ $11\frac{1}{5}$

理由是：() 【A】 $1\frac{3}{5} \times 7 = 1\frac{3}{5}$

$$\text{【B】 } 1\frac{3}{5} \times 7 = 1 \times 7 + \frac{3}{5} \times 7 = 7 + \frac{21}{5} = 7\frac{21}{5} = 7\frac{3}{5}$$

$$\text{【C】 } 1\frac{3}{5} \times 7 = 1 \times 7 + 1\frac{3}{5} = 7 + 1\frac{3}{5} = 8\frac{3}{5}$$

$$\text{【D】 } 1\frac{3}{5} \times 7 = \frac{8}{5} \times 7 = \frac{56}{5} = 11\frac{1}{5}$$

$$\text{【E】 } 1\frac{3}{5} \times 7 = 1 \times 7 + \frac{3}{5} = 7 + \frac{3}{5} = 7\frac{3}{5}$$

$$\text{【F】 } 1\frac{3}{5} \times 7 = \frac{8}{5} \times 7 = \frac{8 \times 7}{5 \times 7} = \frac{56}{35} = 1\frac{21}{35} = 1\frac{3}{5}$$

第十七題 巧虎家有一個長方形的小陽台，長 $\frac{21}{6}$ 公尺，寬 $\frac{18}{7}$ 公尺，

求此陽台的面積是多少平方公尺？【長方形面積＝長 × 寬】

答案是：() ① $\frac{13}{14}$ 平方公尺 ② $1\frac{13}{36}$ 平方公尺 ③ 6 平方公尺 ④ 9 平方公尺

理由是：() 【A】 $\frac{21}{6} \times \frac{18}{7} = \frac{3}{6} \times \frac{18}{1} = \frac{1}{2} \times \frac{18}{1} = \frac{1 \times 18}{2+1} = \frac{18}{3} = 6$ 平方公尺

$$\text{【B】 } \frac{21}{6} \times \frac{18}{7} = \frac{3}{1} \times \frac{3}{1} = 6 \text{ 平方公尺}$$

$$\text{【C】 } \frac{21}{6} \times \frac{18}{7} = \frac{21}{42} \times \frac{18}{42} = \frac{1}{7} \times \frac{3}{2} = \frac{13}{14} \text{ 平方公尺}$$

$$\text{【D】 } \frac{21}{6} \times \frac{18}{7} = \frac{(21+18)}{42} = \frac{39}{42} = \frac{13}{14} \text{ 平方公尺}$$

$$\text{【E】 } \frac{21}{6} \times \frac{18}{7} = \frac{3}{6} \times \frac{18}{1} = \frac{3}{1} \times \frac{3}{1} = 9 \text{ 平方公尺}$$

$$\text{【F】 } \frac{21}{6} \times \frac{18}{7} = \frac{7}{2} \times \frac{18}{7} = \frac{7}{2} \times \frac{7}{18} = \frac{49}{36} = 1\frac{13}{36} \text{ 平方公尺}$$

第十八題 1 本數學作業簿的厚度是 $\frac{3}{5}$ 公分，請問 20 本數學作業簿疊在一起的厚度是多少？

答案是：() ① $\frac{60}{100}$ 公分 ② $2\frac{2}{5}$ 公分 ③12 公分 ④ $33\frac{1}{3}$ 公分

理由是：() 【A】 $\frac{3}{5} \times 20 = \frac{60}{100}$ 公分

【B】 $\frac{3}{5} \times 20 = \frac{3}{5} \times \frac{20}{1} = \frac{60}{5} = 12$ 公分

【C】 $20 \div \frac{3}{5} = 20 \times \frac{5}{3} = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}$ 公分

【D】 $\frac{3}{5} \times 20 = \frac{3}{5} \times \frac{20}{1} = 3 \times 4 = 12$ 公分

【E】 $\frac{3}{5} \times 20 = \frac{5}{3} \times 20 = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}$ 公分

【F】 $\frac{3}{5} \times 20 = 20 \div \frac{3}{5} = \frac{20}{1} \times \frac{5}{3} = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}$ 公分

第十九題 爸爸今年 52 歲，爸爸的年齡是小花年齡的 $3\frac{1}{4}$ 倍，小花今年幾歲？

答案是：() ①4 歲 ②13 歲 ③16 歲 ④39 歲

理由是：() 【A】 $\square \times 3\frac{1}{4} = 52$ ， $\square = 52 \div 3\frac{1}{4} = 52 \div \frac{13}{4} = 52 \times \frac{4}{13} = 16$ 歲

【B】 $\square \times 3\frac{1}{4} = 52$ ， $\square = 52 \div 3\frac{1}{4} = \frac{52}{1} \div \frac{13}{4} = \frac{52}{1} \times \frac{4}{13} = 16$ 歲

【C】 $\square \times 3\frac{1}{4} = 52$ ， $\square = 52 \div 3\frac{1}{4} = 52 \times \frac{4}{13} = 52 \times \frac{4}{13} = 16$ 歲

【D】 $\square \times 3\frac{1}{4} = 52$ ， $\square = 52 \div 3\frac{1}{4} = 52 \div \frac{13}{4} = 52 \times \frac{4}{13} = 16$ 歲

【E】 $\square \times 3\frac{1}{4} = 52$ ， $\square = 52 \times \frac{4}{13} = \frac{52}{1} \times \frac{4}{13} = 16$ 歲

【F】 $\square \times 3\frac{1}{4} = 52$ ， $\square = 52 \div 3\frac{1}{4} = 52 \div \frac{13}{4} = 52 \times \frac{4}{13} = 16$ 歲

第二十題 $\frac{5}{6}$ 公升的牛奶平分給 7 個人，請問每個人可得到多少公升的牛奶？

答案是：() ① $\frac{5}{42}$ 公升 ② $\frac{35}{42}$ 公升 ③ $5\frac{5}{6}$ 公升 ④ $8\frac{2}{5}$ 公升

理由是：() 【A】 $\frac{5}{6} \times 7 = \frac{5 \times 7}{6 \times 7} = \frac{35}{42}$ 公升

【B】 $\frac{5}{6} \div 7 = \frac{6}{5} \times 7 = \frac{42}{5} = 8\frac{2}{5}$ 公升

【C】 $\frac{5}{6} \div 7 = \frac{5}{6} \times \frac{1}{7} = \frac{5}{42}$ 公升

【D】 $\frac{5}{6} \div 7 = \frac{5 \times 7}{6 \times 7} \div 7 = \frac{35}{42} \div 7 = \frac{42}{35} \div 7 = \frac{42}{5} = 8\frac{2}{5}$ 公升

【E】 $\frac{5}{6} \div 7 = \frac{5 \times 7}{6 \times 7} = \frac{35}{42}$ 公升

【F】 $\frac{5}{6} \div 7 = \frac{35}{6} = 5\frac{5}{6}$ 公升

第二十一題 甲的 $4\frac{1}{2}$ 倍是 9，請問甲是多少？

答案是：() ① $\frac{1}{2}$ ② $1\frac{1}{8}$ ③ 2 ④ $40\frac{1}{2}$

理由是：() 【A】 甲 $\times 4\frac{1}{2} = 9$ ，甲 $= 9 \times 4\frac{1}{2} = 9 \times \frac{9}{2} = \frac{81}{2} = 40\frac{1}{2}$

【B】 甲 $\times 4\frac{1}{2} = 9$ ，甲 $= 9 \div 4\frac{1}{2} = 9 \div 4 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$

【C】 甲 $\times 4\frac{1}{2} = 9$ ，甲 $= 9 \div 4\frac{1}{2} = 9 \div \frac{9}{2} = 9 \times \frac{2}{9} = 2$

【D】 甲 $\times 4\frac{1}{2} = 9$ ，甲 $= 9 \times 4\frac{1}{2} = 9 \times \frac{9}{2} = \frac{1}{9} \times \frac{9}{2} = \frac{1}{2}$

【E】 甲 $\times 4\frac{1}{2} = 9$ ，甲 $= 9 \div 4\frac{1}{2} = 9 \div \frac{9}{2} = 9 \times \frac{2}{9} = \frac{81}{2} = 40\frac{1}{2}$

【F】 甲 $\times 4\frac{1}{2} = 9$ ，甲 $= 4\frac{1}{2} \div 9 = 4\frac{1}{2} \times \frac{1}{9} = \frac{9}{2} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{2}$

第二十二題 一壺奶茶有 $4\frac{1}{2}$ 公升，把 $\frac{3}{4}$ 公升裝成一杯，全部裝完，

請問可以裝成幾杯？

答案是：() ① $\frac{1}{6}$ 杯 ② $3\frac{3}{8}$ 杯 ③ $4\frac{3}{8}$ 杯 ④ 6 杯

理由是：() 【A】 $4\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{9}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{36}{6} = 6$ 杯

$$\text{【B】 } \frac{3}{4} \div 4\frac{1}{2} = \frac{3}{4} \div \frac{9}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{6} \text{ 杯}$$

$$\text{【C】 } 4\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8} \text{ 杯}$$

$$\text{【D】 } \frac{3}{4} \times 4\frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{9}{2} = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8} \text{ 杯}$$

$$\text{【E】 } 4\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = (4 \times 1) + (\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}) = 4 + \frac{3}{8} = 4\frac{3}{8} \text{ 杯}$$

$$\text{【F】 } 4\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{9}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{9}{2} \times \frac{4}{3} = 3 \times 2 = 6 \text{ 杯}$$

第二十三題 $2\frac{1}{3} + (3\frac{11}{12} - 1\frac{3}{4}) = ()$ ，請算出答案，並選出理由。

答案是：() ① $4\frac{1}{2}$ ② $4\frac{3}{4}$ ③ $5\frac{1}{3}$ ④ $5\frac{5}{12}$

理由是：() 【A】 $2\frac{1}{3} + (3\frac{11}{12} - 1\frac{3}{4}) = 2\frac{1}{3} + (3\frac{11}{12} - 1\frac{3 \times 3}{4 \times 3}) = 2\frac{1}{3} + 2\frac{11-9}{12}$

$$= 2\frac{1}{3} + 2\frac{2}{12} = 2\frac{3}{12} + 2\frac{2}{12} = 4\frac{6}{12} = 4\frac{1}{2}$$

$$\text{【B】 } 2\frac{1}{3} + (3\frac{11}{12} - 1\frac{3}{4}) = 2\frac{1}{3} + (3-1) + (\frac{11}{12} - \frac{3}{4})$$

$$= 2\frac{1}{3} + 2 + \frac{8}{12} = 2+2 + \frac{1}{3} + \frac{8}{12} = 4 + \frac{9}{12} = 4 + \frac{3}{4} = 4\frac{3}{4}$$

$$\text{【C】 } 2\frac{1}{3} + (3\frac{11}{12} - 1\frac{3}{4}) = 2\frac{1}{3} + 2\frac{8}{8} = 2\frac{1}{3} + 3 = 5\frac{1}{3}$$

$$\text{【D】 } 2\frac{1}{3} + (3\frac{11}{12} - 1\frac{3}{4}) = 2\frac{1}{3} + (3\frac{11}{12} - 1\frac{3}{12}) = 2\frac{1}{3} + 2\frac{8}{12}$$

$$= 2\frac{1}{12} + 2\frac{8}{12} = 4\frac{9}{12} = 4\frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned}
 \text{【E】 } 2\frac{1}{3} + \left(3\frac{11}{12} - 1\frac{3}{4}\right) &= 2\frac{1}{3} + (3+1) + \left(\frac{11}{12} + \frac{3}{4}\right) \\
 &= 2\frac{1}{3} + \left(2 + \frac{11}{12} + \frac{14}{12}\right) = 2\frac{1}{3} + \left(2 + \frac{25}{12}\right) = 2\frac{1}{3} + 2\frac{25}{12} \\
 &= 2\frac{4}{12} + 2\frac{25}{12} = 2\frac{4}{12} + 3\frac{1}{12} = 5\frac{5}{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{【F】 } 2\frac{1}{3} + \left(3\frac{11}{12} - 1\frac{3}{4}\right) &= 2\frac{1}{3} + \left(3\frac{11}{12} - 1\frac{3 \times 3}{4 \times 3}\right) \\
 &= 2\frac{1}{3} + \left(3\frac{11}{12} - 1\frac{9}{12}\right) = 2\frac{1}{3} + 2\frac{2}{12} = 2\frac{1 \times 4}{3 \times 4} + 2\frac{2}{12} \\
 &= 2\frac{4}{12} + 2\frac{2}{12} = 4\frac{6}{12} = 4\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$



第二十四題 $70 \div \frac{2}{5} \times 9 = (\quad)$ ，請算出答案並選出正確的過程。

答案是：() ① $3\frac{1}{9}$ ② $19\frac{4}{9}$ ③ 288 ④ 1575

理由是：() 【A】 $70 \div \frac{2}{5} \times 9 = 70 \times \frac{2}{5} \times 9$

【B】 $70 \div \frac{2}{5} \times 9 = 70 \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{9}$

【C】 $70 \div \frac{2}{5} \times 9 = \frac{1}{70} \times \frac{2}{5} \times 9$

【D】 $70 \div \frac{2}{5} \times 9 = 70 \times \frac{5}{2} \times 9$

【E】 $70 \div \frac{2}{5} \times 9 = 70 \times \frac{5}{2} \times \frac{1}{9}$

【F】 $70 \div \frac{2}{5} \times 9 = \frac{1}{70} \times \frac{5}{2} \times 9$

第二十五題 快樂小學有男生 60 人，佔全校人數的 $\frac{3}{5}$ ，請問全校的女生有多少人？

答案是：() ① 24 人 ② 36 人 ③ 40 人 ④ 48 人

理由是：() 【A】 $60 \div \frac{3}{5} = 60 \times \frac{3}{5} = 12 \times 3 = 36$ ， $60 - 36 = 24$ 人

【B】 $60 \div \frac{3}{5} = 60 \times \frac{5}{3} = \frac{60}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{300}{3} = 100$ ， $100 - 60 = 40$ 人

【C】 $60 \div \frac{3}{5} = 60 \times \frac{3}{5} = 12 \times 3 = 36$ 人

【D】 $\frac{3}{5} \div 60 = \frac{5}{3} \times 60 = 100$ ， $100 - 60 = 40$ 人

【E】 $60 \div \frac{3}{5} = 60 \times \frac{3}{5} = \frac{60}{3} \times \frac{3}{5} = 12$ ， $60 - 12 = 48$ 人

【F】 $60 \div \frac{3}{5} = 60 \times \frac{5}{3} = 20 \times 5 = 100$ ， $100 - 60 = 40$ 人

第二十六題 $\frac{5}{7}$ 杯的水，倒出 $\frac{2}{3}$ 公升後，杯子裡還剩下 $\frac{2}{7}$ 公升的水，杯子的容量是多少公升？

答案是：() ① $\frac{100}{147}$ 公升 ② $\frac{1}{3}$ 公升 ③ $1\frac{1}{3}$ 公升 ④ $1\frac{2}{3}$ 公升

理由是：() 【A】 $\frac{5}{7} - \frac{2}{3} + \frac{2}{7} = \frac{5 \times 3}{7 \times 3} - \frac{2 \times 7}{3 \times 7} + \frac{2 \times 3}{7 \times 3} = \frac{15 - 14 + 6}{21} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$ 公升

$$\begin{aligned} \text{【B】 } \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{7} \right) \times \frac{5}{7} &= \left(\frac{2 \times 7}{3 \times 7} + \frac{2 \times 3}{7 \times 3} \right) \times \frac{5}{7} = \left(\frac{14}{21} + \frac{6}{21} \right) \times \frac{5}{7} \\ &= \frac{20}{21} \times \frac{5}{7} = \frac{100}{147} \text{ 公升} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{【C】 } \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{7} \right) \div \frac{5}{7} &= \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{7} \right) \times \frac{7}{5} = \left(\frac{2 \times 7}{3 \times 7} + \frac{2 \times 3}{7 \times 3} \right) \times \frac{7}{5} \\ &= \left(\frac{14}{21} + \frac{6}{21} \right) \times \frac{7}{5} = \frac{20}{21} \times \frac{7}{5} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3} \text{ 公升} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{【D】 } \frac{5}{7} + \frac{2}{3} + \frac{2}{7} &= \frac{5 \times 3}{7 \times 3} + \frac{2 \times 7}{3 \times 7} + \frac{2 \times 3}{7 \times 3} = \frac{15}{21} + \frac{14}{21} + \frac{6}{21} \\ &= \frac{15 + 14 + 6}{21} = \frac{35}{21} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3} \text{ 公升} \end{aligned}$$

$$\text{【E】 } \frac{5}{7} + \frac{2}{7} - \frac{2}{3} = \frac{7}{7} - \frac{2}{3} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{【F】 } \frac{5}{7} \div \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{7} \right) &= \frac{5}{7} \div \left(\frac{2 \times 7}{3 \times 7} + \frac{2 \times 3}{7 \times 3} \right) = \frac{5}{7} \div \left(\frac{14}{21} + \frac{6}{21} \right) \\ &= \frac{5}{7} \div \frac{20}{21} = \frac{5}{7} \times \frac{21}{20} = \frac{100}{147} \text{ 公升} \end{aligned}$$