

國立臺東大學教育學系
課程與教學碩士班
碩士論文

指導教授：王前龍 博士

The logo of National Taitung University is a circular emblem. It features a stylized star or compass rose in the center, with the university's name in Chinese characters '國立臺東大學' at the top and 'National Taitung University' in English at the bottom.

一元一次方程式解題錯誤類型
補救教學之研究

研 究 生：陳卓怡 撰

中華民國一〇九年六月



國立臺東大學教育學系
課程與教學碩士班
碩士論文

一元一次方程式解題錯誤類型
補救教學之研究



研 究 生：陳卓怡 撰

指導教授：王前龍 博士

中華民國一〇九年六月

國立臺東大學
學位論文考試委員審定書

系所別：教育學系課程與教學碩士班

本班 陳卓怡君

所提之論文：一元一次方程式解題錯誤類型補救教學之研究

業經本委員會通過合於 ☒ 碩士學位論文 條件
☐ 博士學位論文
論文學位考試委員會：

王慧蘭

(學位考試委員會主席)

鄭承尚

王前龍

(指導教授)

論文學位考試日期：民國 109 年 06 月 18 日

國立臺東大學

附註：1. 本表一式二份經學位考試委員會簽後，正本送交系所辦公室及註冊組或進修部存查。

2. 本表為日夜學制通用，請依個人學制分送教務處或進修部辦理。

國立臺東大學 學位論文授權書

重要事項說明：依著作權法第十五條第二項第三款規定，「依學位授予法撰寫之碩士、博士論文，著作人已取得學位者，推定著作人同意公開發表其著作」。本校圖書資訊館就紙本學位論文之閱覽服務依前開規定，採公開閱覽為原則。如論文涉及專利申請、投稿論文、機密或其他法定事由，需延後公開紙本論文者，請另行填寫本校「學位論文延後公開申請書」。(申請書得自本館網站下載)

本授權書所授權之論文為本人在 國立臺東大學 教育學 系(所)

課程與教學碩士 班 108 學年度第 二 學期取得 碩 士學位之論文。

論文名稱：一元一次方程式解題錯誤類型補救教學之研究

一、本人具有著作財產權之上列 (☒ 學位論文 ☐ 書面報告 ☐ 技術報告 ☐ 專業實務報告) 之電子全文(含書目、摘要、圖檔、影音資料、附件等)，依著作權法規定，非專屬、無償授權予下列單位得重製、上載網站，藉由網路傳輸，提供讀者基於個人非營利性質之線上檢索、閱覽、下載或列印。

單位	公開上網時程
本人畢業學校	(依據 108 學年度第一學期第 3 次行政會議決議：研究生畢業論文延後公開上網時程，至多以三年為原則) ☒ 立即公開 ☐ 一年後公開 ☐ 二年後公開 ☐ 三年後公開
國家圖書館	☒ 立即公開 ☐ 一年後公開 ☐ 二年後公開 ☐ 三年後公開 ☐ 不同意公開
與本人畢業學校圖書資訊館簽訂合作協議之資料庫業者	☒ 立即公開 ☐ 一年後公開 ☐ 二年後公開 ☐ 三年後公開 ☐ 不同意公開

二、本人 (☒ 同意 ☐ 不同意) 本人畢業學校圖書資訊館基於學術傳播之目的，在上述範圍內得再授權第三人進行資料重製。

上述授權內容均無須訂立讓與及授權契約書。依本授權之發行權為非專屬性發行權利。依本授權所為之收錄、重製、發行及學術研發利用均為無償。上述同意與不同意之欄位若未勾選，本人同意視同同意授權。

學 號：10701203 (務必填寫)

研究生簽名：陳卓怡 (親筆正楷)

指導教授簽名：王新龍 (親筆簽名)

日 期：中華民國 108 年 5 月 27 日

本授權書(得自本校圖書資訊館網站下載)請以黑筆撰寫並影印裝訂於書名頁之次頁。

授權書版本:2020/01/02

謝 誌

大三那年我決定繼續升學，除了想取得碩士學位外，也是鼓勵自己勇敢踏出舒適圈，精進自我提升個人學識涵養，接觸更多不同領域的人。在臺東大學求學期間，同時要兼顧碩士班的課業與論文產出，備感艱辛、充滿挑戰性，但在這過程中我很努力學習，奠定了紮實的理論知識，也獲得不同的人生體驗與收穫。

還記得剛進入課程所的第一週，前龍老師在第一堂課談論如何有效率地完成學業，抓緊時間在兩年內完成論文準時畢業，此外，在碩一的一整年裡，前龍老師在課堂上經常強調「我們與畢業的距離」這件事情，督促大家要把撰寫論文這件大事放在心上，我能夠深刻感受到老師的用心良苦，十分積極地想帮助大家找出論文撰寫方向，慢慢建立基本架構，因此我在修課之餘，也花許多時間與精力思考、撰寫論文，按時完成老師所訂定的進度，逐步往前推進。論文撰寫就好比是一段很漫長的腦力激盪訓練，相信經過長時間的訓練下，寫作技巧方面會有所進步；論文撰寫更像是一場耐力考驗比賽，唯有堅持、堅持、再堅持，秉持莫忘初衷的信念，才能一氣呵成完成學業。

最後，十分感謝指導教授王前龍老師的用心付出與耐心指導，以及口試委員們提供許多寶貴的建議；也很感謝自己這段時間的努力與付出，如期完成論文，順利完成人生階段性任務，在此也感謝家人、師長及朋友們的全力支持，謝謝大家！

陳卓怡 謹致於 2020 年 6 月

一元一次方程式解題錯誤類型 補救教學之研究

作者：陳卓怡

國立臺東大學 教育學系課程與教學碩士班

摘 要

本研究利用「一元一次方程式－以符號列式與運算」前測試卷，對高雄市某國中七年級補救班級學生（共五位）進行紙筆測驗，其分數作為學習成效前測數據，並從答錯試題探討學生在本單元常出現的錯誤類型之狀態，據以發展補救教學之目的；經分析後歸納出學生常出現三項錯誤類型，接著針對三項錯誤類型進行補救教學；完成補救教學後，再次對研究對象施測「一元一次方程式－以符號列式與運算」後測試卷，其分數作為學習成效後測數據，探討「一元一次方程式－以符號列式與運算」三項錯誤類型之補救成效。

研究結果為：一、學生在「一元一次方程式－以符號列式與運算」常出現的三項錯誤類型之狀態主要如下：1. 錯誤類型一：未理解運算符號與代數符號之使用方式，且認為式子化簡結果為單項式型式，以及題意理解能力不佳，導致未能正確運用運算符號與代數符號記錄成代數式；2. 錯誤類型二：主要是未依題意進行乘法運算、化簡，卻用加、減法進行代數符號與數字運算，組合答案；3. 錯誤類型三：主要是未能正確地將代數符號、數字做分別合併，卻將前兩項與後兩項係數合併與運算，導致代數式合併、化簡結果錯誤。二、第一次補救後全部學生已能正確運用「運算符號與代數符號將題意記錄成代數式」；二次補救後全部學生在「代數符號簡記」、「代數符號及數字同類項合併、記錄」的解題能力、答題正確率有明顯進步，教學實驗證明補救後學習成效顯著提升。

關鍵詞：一元一次方程式、數學錯誤類型、數學補救教學

The Types of Errors in Solving Problems of Linear Equations in One Variable Study of Remedial Teaching

Chen, Zhuo-Yi

Abstract

This study the pre-test paper of " Linear equations in one variable – use symbols to develop a formula and calculate " to conduct a written test for five 7th grader from Kaohsiung. Their scores were used as the pre-test data of learning effectiveness, and to discover the types of errors that students often made in this unit from their wrong answers in order to develop the remedial teaching. After analysis, we concluded that students often made three types of mistakes, then we aimed at these three types of mistakes to conduct the remedial teaching. After completed remedial teaching to these students, the post-test to the research objects with " Linear equations in one variable – use symbols to develop a formula and calculate " was processed again. Their scores were used as post-test data for learning effectiveness, and to discover the remedial effects on these three types of errors in " Linear equations in one variable – use symbols to develop a formula and calculate ".

The research results are as follows: First of all, the situation of these three types of errors that students often made in " Linear equations in one variable – use symbols to develop a formula and calculate" are : 1. Error type one: Students did not understand the usage of operational symbols and algebraic symbols, and thought that the result of formula simplification should be a single-term type, furthermore the ability to understand the problem was poor, resulting in the failure to correctly use the operational symbols and algebraic symbols into algebraic form. 2. Error type two: Students mainly didn't carry out the multiplication and simplification according to the meaning of the question, but used addition and subtraction to operate the algebraic signs and calculating numbers to obtain the answers. 3. Error type 3: The main mistake that students made was that the algebraic symbols and numbers were not correctly merged separately, students mostly combined the first two and the last two coefficients and did the operations; this has led to erroneous results of algebraic term merging and simplification. Secondly, after the first remedial teaching, all students were able to correctly

use the "operational symbols and algebraic symbols to resolve the problem into algebraic terms"; After the second remedial teaching, all students had completely corrected these two types of errors in "abbreviation of algebraic symbols", "merging and recording the same terms of algebraic symbols and numbers", therefore the teaching experiment has shown that the effectiveness of learning after remediation is significantly improved.

Keywords: *Linear Equations in One Variable, Mathematic error types, Mathematic remedial teaching*



目次

謝 誌.....	i
中文摘要.....	ii
Abstract.....	iii
目 次.....	v
表 次.....	viii
圖 次.....	xi
第一章 緒論.....	1
第一節 研究背景與動機.....	1
第二節 研究目的與問題.....	4
第三節 名詞釋義.....	4
第四節 研究範圍與限制.....	6
第二章 文獻探討.....	9
第一節 補救教學之理念與方法.....	9
第二節 數學學習成就低落學生之補救教學.....	17
第三節 一元一次方程式及其解題錯誤類型.....	22
第四節 相關研究.....	33
第三章 研究設計與實施.....	37
第一節 研究架構與流程.....	37
第二節 研究場域與對象.....	39
第三節 研究方法.....	45
第四節 研究設計.....	47

第五節 研究工具.....	48
第六節 資料處理與分析.....	57
第七節 教育研究倫理.....	59
第四章 研究發現與討論.....	61
第一節 分析學生於三項錯誤類型之狀態.....	61
第二節 三項錯誤類型補救教學對學生的學習成效影響.....	84
第五章 結論與建議.....	97
第一節 結論.....	97
第二節 建議.....	103
參考文獻.....	107
附錄	
附錄 1 一元一次方程式補救教學教案 (I)	117
附錄 2 一元一次方程式補救教學教案 (II)	123
附錄 3 一元一次方程式補救教學教案 (III)	127
附錄 4 一元一次方程式補救教學教案 (IV)	131
附錄 5 「一元一次方程式－以符號列式與運算」前測專家試卷審閱.....	135
附錄 6 「一元一次方程式－以符號列式與運算」後測專家試卷審閱.....	139
附錄 7 「一元一次方程式－以符號列式與運算」學習單專家試卷審閱.....	143
附錄 8 「一元一次方程式－以符號列式與運算」評量卷1專家試卷審閱.....	149
附錄 9 「一元一次方程式－以符號列式與運算」評量卷2專家試卷審閱.....	151
附錄 10 「一元一次方程式－以符號列式與運算」評量卷3專家試卷審閱.....	153
附錄 11 「一元一次方程式－以符號列式與運算」前測正式試卷.....	155
附錄 12 「一元一次方程式－以符號列式與運算」後測正式試卷.....	159

附錄 13 「一元一次方程式－以符號列式與運算」學習單（正式版）	163
附錄 14 「一元一次方程式－以符號列式與運算」評量卷1（正式版） ...	165
附錄 15 「一元一次方程式－以符號列式與運算」評量卷2（正式版） ...	167
附錄 16 「一元一次方程式－以符號列式與運算」評量卷3（正式版） ...	169
附錄 17 訪談知情同意書.....	171
附錄 18 訪談大綱.....	173
附錄 19 訪談紀錄.....	175
附錄 20 學生答題情況紀錄表.....	179
附錄 21 教學日誌.....	183



表 次

表 1 三層級學習支援系統.....	12
表 2 S1研究參與者背景分析與概念錯誤類型.....	40
表 3 S2研究參與者背景分析與概念錯誤類型.....	41
表 4 S3研究參與者背景分析與概念錯誤類型.....	42
表 5 S4研究參與者背景分析與概念錯誤類型.....	43
表 6 S5研究參與者背景分析與概念錯誤類型.....	44
表 7 教學實驗設計.....	47
表 8 教學實驗課程規劃簡表.....	47
表 9 研究工具總表.....	48
表 10 前、後測試卷－專家效度名單.....	49
表 11 前測試卷－專家審題修改對照表.....	50
表 12 後測試卷－專家審題修改對照表.....	51
表 13 研究對象及「一元一次方程式－以符號列式與運算」前、後測成績.....	52
表 14 學習單－專家審題修改對照表.....	52
表 15 評量卷1－專家審題修改對照表.....	54
表 16 評量卷2－專家審題修改對照表.....	54
表 17 評量卷3－專家審題修改對照表.....	55
表 18 「一元一次方程式－以符號列式與運算」前測答題情形分析（N=5）....	62
表 19 錯誤類型一（例題1）之解題狀態分析.....	63
表 20 錯誤類型一（例題2）之解題狀態分析.....	64
表 21 錯誤類型一（例題3）之解題狀態分析.....	65
表 22 錯誤類型一（例題4）之解題狀態分析.....	66

表 23 錯誤類型二（例題5）之解題狀態分析.....	69
表 24 錯誤類型二（例題6）之解題狀態分析.....	70
表 25 錯誤類型二（例題7）之解題狀態分析.....	71
表 26 錯誤類型二（例題8）之解題狀態分析.....	72
表 27 錯誤類型二（例題9）之解題狀態分析.....	73
表 28 錯誤類型二（例題10）之解題狀態分析.....	74
表 29 錯誤類型二（例題11）之解題狀態分析.....	75
表 30 錯誤類型二（例題12）之解題狀態分析.....	75
表 31 錯誤類型三（例題13）之解題狀態分析.....	77
表 32 錯誤類型三（例題14）之解題狀態分析.....	79
表 33 錯誤類型三（例題15）之解題狀態分析.....	81
表 34 前、後測成績－描述性統計分析（N=5）.....	86
表 35 錯誤類型一成績描述性統計分析（N=5）.....	86
表 36 錯誤類型二成績描述性統計分析（N=5）.....	86
表 37 錯誤類型三成績描述性統計分析（N=5）.....	87
表 38 整體學習成效－前、後測總成績相依樣本t檢定（N=5）.....	88
表 39 錯誤類型一學習成效－前、後測成績相依樣本t檢定（N=5）.....	88
表 40 錯誤類型二學習成效－前、後測成績相依樣本t檢定（N=5）.....	89
表 41 錯誤類型三學習成效－前、後測成績相依樣本t檢定（N=5）.....	89
表 42 「一元一次方程式－以符號列式與運算」後測答題情形分析（N=5）.....	90
表 43 錯誤類型一之解題狀態分析（後測）.....	91
表 44 錯誤類型二之解題狀態分析（後測）.....	91

表 45 錯誤類型三（例題13）之解題狀態分析（後測）.....	92
表 46 錯誤類型三（例題14）之解題狀態分析（後測）.....	93
表 47 錯誤類型三（例題15）之解題狀態分析（後測）.....	94
表 48 實驗組與控制組前測、後測設計.....	105



圖 次

圖 1 研究架構圖.....	37
圖 2 研究流程圖.....	38



第一章 緒論

本章共分四節，第一節為研究背景與動機，第二節為研究目的與問題，第三節為名詞釋義，第四節為研究範圍與限制。

第一節 研究背景與動機

追求教育公平性、提升教育品質是國際間長期關切的議題(Rodriguez, 2005)，偏鄉地區的學校多位在交通不便之處、獲得的社會與教育資源較都市地區學校薄弱、經費不足，軟硬體設備更新速度慢、城鄉師資分配不均，教師的年資淺，教學經驗不足，且流動率高，上述皆為偏鄉學校或是經濟、文化弱勢地區學校的學生們，受到教育機會不均等待遇之重要原因，也影響到學生學習表現。有研究指出，臺灣自九年一貫課程開始施行後，城鄉教育品質和教育結果的差距更為擴大，學生程度形成一個顯著的 M 型化趨勢，同時也更突顯出「處於社經、文化弱勢的偏鄉學校」教學品質每況愈下的情況(邱坤良，2007；徐偉民、劉曼麗，2015；甄曉蘭，2007)。

偏鄉地區的學童多數來自社會、經濟、文化弱勢家庭，處於不利於學習的環境，而且長期以來，許多實徵研究已證實家庭社經地位與學童學業成就高低有正相關(李宜玫，2012)，因此相對而言，偏鄉地區學習成就低落學生的比例較都市地區的學校高，然而，教育部正視到協助「學習成就低落學生」問題的重要性與急迫性，因此積極地計畫與推動「補救教學」相關政策(楊智穎、陳怡玲，2013)。補救教學的核心精神在於「落實教育公平」、「把每個孩子帶上來」，給予學習成就低落學童更多額外的學業補強，把他們的競爭能力提升至平均水準(許素娟，2018)，或提供屬於低成就學生的高危險群，像是貧窮弱勢家庭的國中小學生們做一個預防性補救教學，預防學生學習失敗，鞏固基本學力(李彥儀，2016；曾世杰、陳淑麗，2010)，同時降低馬太效應情況發生(簡淑真，2010)。

甘鳳琴(2007)研究指出，學習能力的強弱差距從五歲就開始，小學一年級成績最後10%，小學六年級時有89%的機會，仍然是最後的10%；小學二、三年級提供補救教學達到普通班級水準的機會分別是82%和46%，但到了小學五年級到國中一年級，只有10至15%的機會；另外，鄭章華、林佳慧(2012)也指出，大部分的學童如果在國小階段數學科學習表現即不理想，到了國中階段，學習成績落在班上後段的可能性會很高，造成數學科越學越差，陷入惡性循環。綜合前述，彰顯出補救教學及早介入的重要性，越早開始效果越好。補救教學是學習輔導重要環節，每當學生有學習困難時，應獲得適當的診斷式教學(唐淑華，2013)，把不會的基本觀念弄懂，減少學生學業失敗的機會，否則輸在起跑點，隨著課程進度的進行，不

會的內容累積越來越多，學習能力和同儕之間只會差距擴大，學生在往後的學習道路上會遇到更多的障礙，漸漸地失去自信心與喪失學習動力。

英國前首相布萊爾（T. Blair, 1953-）曾說：「教育是一種機會的概念，也是社會正義、權利的象徵」（Gillborn & Youdell, 2000）。教育發展是評估現代化國家指標之一，教育投資有助促進國家社經發展，落實教育機會均等、社會正義（教育部，2017）。陳俊宏（2016）也認為，受教育不僅是個人獲得知識，廣泛的來看，也有減少社會成本的功能，利於社會整體發展。假使國民教育學識不足，社會需要付出龐大代價彌補衍生出來的問題，例如：學業低成就可能導致未來沒辦法找到穩定、高所得的工作，導致國民所得減少，政府稅收也隨之減少，社會福利支出增加；學業低成就甚至可能引發個人情緒憂鬱或焦慮，或者社會適應不良，無法與人和平共處等問題（王瓊珠，2017；Diaz, 1998），造成犯罪率上升，治安不佳等隱憂，對國家整體影響甚鉅。因此，從「鞏固孩子們的基本學力」做起才是根本，不僅利於個人未來生涯發展，同時為國家社會、經濟帶來利基（楊怡姿，2017），如能達到高品質教育之標竿，更是每一位公民最大的福祉，也是國家最大的財富。

此外，為了配合十二年國教政策之推動，教育部2012年起整合相關人力和資源，推動「國民小學及國民中學補救教學實施方案」；2013年起，教育部進階將相關計畫整合為「十二年國教補救教學實施方案」，期望能將低成就學生都帶上來，國民小學及國民中學補救教學實施方案實行至今已經超過五年，經費投入逐年增加（田建中，2017），該方案實施至今，總投入經費是相當可觀的金額。此外，政府考量到人力及資源有限的問題，教育部國民及學前教育署自2014年起，積極與民間基金會攜手合作，一起為補救教學向下紮根、師資培訓、編輯教材等等投入更多資源與心力，齊心打造更密集、完善的補救教學網絡（教育部，2015）。雖然公、私部門多年來挹注多方資源進補救教學系統，但要達到提升補救教學的整體品質與成效，並非單一投入大量的教育經費、建造教育設施、增加大量師資人力就能達成目標，大家也應該把焦點聚焦在整個教育過程的課程教學品質、學習成效，補救教學系統的功能才會完整地彰顯（甄曉蘭，2007）。

國中學生數學程度有明顯「差異化」，是目前國中數學教師在教學過程中所面臨的一大挑戰。由於每位學生對於數學科的敏銳度不同，相對吸收數學知識的速度有差異，在國中分班沒有經過考試分流、常態分班的情況下，產生了「同一班級裡，儘管每位學生拿著相同程度的教材，上著相同的教學進度，卻還是存在數學學習低成就的學生」的問題。部分學生因先天環境不利因素，例如：語言文化差異、經濟弱勢、家庭問題，導致數學學習成就低落，也有部分數學學習低成的學生，本身有心想學，也花費許多時間及心思在上面，但用錯方法，成績始終沒起色；甚至有部分學生因為學習動機低弱，又歷經多次挫折，失去信心，直接放棄數學科（施信源、顏美雯，2015）。歸納上述情況，彰顯出實施數學科補救教學的重要性與及早介入的必要性。進行數學科補救教學的過程，教師應透過有效的教學策略，從基本觀念教起，螺旋式的逐步加深難度，補足過去沒學好的部分，銜接後續的學習內容，並

且慢慢建立學生正確的學習方法，幫助建立成功的機會，重拾學習數學的興趣與熱情（林玉雲，2017）。

依據皮亞傑－認知發展理論，中學生正處於青少年時期，屬於形式運思期階段，學生應具備抽象符號之假設、演繹推理能力，所以將抽象的代數符號概念融入國中數學課程之中，也是幫助未來數理領域的學習及發展（謝和秀，2000）；國中數學學習分為四主軸：數與量、代數、幾何、統計與機率等，每一主軸皆有獨自的學習順序，基本概念理解開始，逐步增難、學習範疇擴大，乃至將所學應用到生活之中（徐偉民、劉曼麗，2015）。學習代數單元是銜接高等數學的根基，中學生在該階段已具備一般知識結構和能力，足以用來學習較高層次的數學，我國中學數學教育從國一上開始就有代數課程，以一元一次方程式作為建構代數觀念的起始單元，之後代數符號概念不斷加深加廣，持續延伸到國三下的二次函數單元；代數單元在國中數學全部課程中佔比將近三分之一，算是在國中數學整體課程佔有一席之地（楊淑如，2016；謝和秀，2000；Olive, Izsak, & Blanton, 2002）。洪健鋒（2016）認為，算數與代數之間是有連貫性的，因此學習代數有助於「代數與算數」間的思路轉換與靈活運用。綜合上面所述，奠定良好的代數基礎，不僅對學生的推理、邏輯思考能力有相當助益，而且代數單元在國中數學課程佔有相當比重，對國中教育會考成績有很大的影響，因此「一元一次方程式」單元的基礎養成是一個值得研究的議題。

謝和秀(2000)於教學現場教完一元一次方程式單元後，讓學生進行習題演練，然後幫他們把答錯試題歸納成數種錯誤類型；而所謂的「錯誤類型」，林清山與張景媛（1994）、張鳳燕（1991）、Babbitt（1990）、Kathleen（1987）等人認為，錯誤類型是指在處理某單元(主題)的數學問題時，可能會出現多種可能性的錯誤，我們根據每一種不同錯誤的關鍵因素或錯誤特徵，把它一一分類，每一種被分類出來的錯誤被視為一種錯誤類型；李芳樂（1993）將錯誤類型概分為系統性錯誤和隨機型錯誤，前者是指因學到錯誤觀念，導致應用到解題時，於類似問題中重複出現相同性質的錯誤，此種錯誤類型屬於系統性錯誤；後者是因疏忽而造成運算式中有瑕疵，此種錯誤類型屬於隨機型錯誤。而本研究所指稱的答題錯誤類型，屬系統性錯誤，理由在於學生因對代數符號基本觀念不理解，導致解類似觀念的題型出現重複性錯誤。此外，一元一次方程式的錯誤類型可分為三種：有關代數符號的錯誤類型、有關方程式的錯誤類型、有關文字題的錯誤類型，而本研究是針對代數符號類型的錯誤進行補救。

本研究起初對研究對象進行「一元一次方程式－以符號列式與運算」前測筆試，其分數作為學習成效前測數據，並從答錯試題探討學生在本單元常出現的錯誤類型之狀態，據以發展補救教學之目的；經分析後歸納出學生常出現三項錯誤類型，接著研究者實際擔任本研究的教學者，針對三項錯誤類型進行補救；補救後再對研究對象進行「一元一次方程式－以符號列式與運算」後測筆試，其分數作為學習成效後測數據，探討本單元三項錯誤類型之補救成效。

第二節 研究目的與問題

一、研究目的

基於上述研究背景與動機，本研究目的為：

- (一) 探討七年級學生「一元一次方程式－以符號列式與運算」錯誤類型之狀態，據以發展補救教學之目標。
- (二) 探討教學者針對七年級學生「一元一次方程式－以符號列式與運算」不同錯誤類型狀態所採用的教學策略。
- (三) 探討七年級學生接受「一元一次方程式－以符號列式與運算」錯誤類型補救教學之成效。

二、研究問題

基於上述之研究目的，本研究之問題為：

- (一) 探討七年級學生「一元一次方程式－以符號列式與運算」錯誤類型之狀態為何？
- (二) 探討教學者針對七年級學生「一元一次方程式－以符號列式與運算」不同錯誤類型狀態所採用的教學策略為何？
- (三) 探討七年級學生接受「一元一次方程式－以符號列式與運算」錯誤類型補救教學後，學習成效為何？

第三節 名詞釋義

一、數學錯誤類型

錯誤類型是指數學解題過程中發生錯誤，依據其錯誤，關鍵性地做出某幾種歸納及分類，其各項類型稱為錯誤類型。林清山與張景媛（1994）、張鳳燕（1991）、Babbitt（1990）、Kathleen（1987）等人認為，錯誤類型是指在處理某單元（主題）的數學問題時，根據每一種不同錯誤的關鍵因素或錯誤特徵，把它一一分類，每一種被分類出來的錯誤被視為一種錯誤類型；李芳樂（1993）認為錯誤類型可概分為系統性錯誤和隨機型錯誤，前者指因學到錯誤觀念，導致應用到解題時，於類似問題中重複出現相同性質的錯誤，此種錯誤類型屬於系統性錯誤；後者是因疏忽而造成運算式中有瑕疵，此種錯誤類型屬於隨機型錯誤。陳彥廷與柳賢（2009a、2009b）、

郭汾派與林光賢及林福來（1989）、郭汾派（1988）等人，將一元一次方程式的錯誤類型其內涵概括成三項：有關代數符號的錯誤類型、有關方程式的錯誤類型、有關文字題的錯誤類型，而本研究所補救的「以符號列式與運算」是被歸類在「代數符號的錯誤類型」。

本研究是依據研究對象「一元一次方程式－以符號列式與運算」前測答題結果，分析、歸納出數學低成就學生在「一元一次方程式－以符號列式與運算」單元，常出現的三項錯誤類型及錯誤類型之狀態；此外，陳彥廷與柳賢（2009a、2009b）、戴文賓與邱守榕（1999）、Booth（1988）相關領域研究者也指出，學生在一元一次方程式－代數符號相關題型也常出現如研究者所述的三項錯誤類型，包含：

1. 對代數符號之性質不理解，導致作答「運用代數符號記錄數學問題」之題目，無法正確地以代數式呈現；
2. 因未確實理解代數符號之性質，導致在「代數式的簡記」出現錯誤（如：將 $9x$ 誤解成 $9+x$ ），這也連帶影響解「代數式的求值」題型，出現解題困難。
3. 未能正確地將代數符號、數字做分別處理，導致進行代數式的合併與化簡出現錯誤。例如： $2x+6-7+3x$ 化簡後，得 $(2+6-7+3)+x$ 之錯誤結果。

二、數學補救教學

補救教學指協助低成就學生，例如：有學習困難、學習表現不佳，成績未達基本門檻等情況者，額外提供符合個人需求的課業補強與指導，接著藉由「評量－教學－再評量」找出教與學的不足之處予以強化（李坤崇，2019；張新仁，2001）。針對學生學習困難之特質與類型，進行差異化教學，用正確的教學對策，減弱或除去學生在某一特定學科、項目或群組學習困難之現象（楊德清、洪素敏，2008）。劉世雄（2018）指出，差異化教學是指以學生為教學主體，依據學生的程度及需求協同支援學習，以促進每位學生具有意義化的學習挑戰之學習型態；補救教學是對程度落後或低成就學生，施予個別化與適性化教學，讓每位學生在每個年級階段都具備應有的基本學力（梁仲容、韓弘偉、黃建中，2014）。王為國（2005）、林含諭（2017）、黃政傑與張嘉育（2010）指出，個別化與適性化教學強調「切合學習者的能力、興趣與特質，設計不同的教學內容及教學模式，配合個別化教學以發展自我潛能，進而得以自我實現」。補救教學為鞏固基本學力的一種方式，其作法為學校或教師先診斷、評估學生的學習困難點後，根據診斷後結果，利用正規課堂以外的時間，實施適性化教學，解決其學習瓶頸，協助提升學習成就（林寶山，1998；莊惠凱與廖啟順，2017；Eggen & Kauchak, 2012）。

本研究指稱的補救教學，其補救內容為班上學生在「一元一次方程式－以符號列式與運算」單元常出現的三項錯誤類型（請參閱名詞解釋－錯誤類型），教師自行設計教材與課程，予以補強。

第四節 研究範圍與限制

一、研究範圍

(一) 研究對象

本研究之研究對象以高雄市一所國中七年級數學學習低成就學生，學生組成為抽離自兩個不同班級之學生，男生兩位、女生三位，共計五位。此五名學生皆為參加 108 年 5 月「國民小學及國民中學補救教學科技化評量數學科測驗」後，測驗結果在各班學習成就後 35%，未通過數學科篩選測驗之學生。

(二) 研究期程

本研究於 2018 年 10 月開始蒐集相關文獻資料，同時開始思考與設計適合研究對象的教學課程；本研究的各項試卷於 2019 年 11 月 25 日前專家及教師審訂完畢，並於 2019 年 11 月 29 日的第八節課進行前測筆試，測驗時間為 40 分鐘；補救課程起訖日為 2019 年 12 月 6 日至 2019 年 12 月 27 日，於每週五的第八節課進行補救教學，共 4 節課，每節為 50 分鐘，共 200 分鐘；課程教學完畢後，於 2020 年 1 月 3 日的第八節課後測筆試，測驗時間亦同。

(三) 教材內容

本研究針對學生於「一元一次方程式—以符號列式與運算」單元中常出現的三項錯誤類型，作為教材內容予以加強，並精熟相關習題演練，其錯誤類型如下：

1. 對代數符號之性質不理解，導致作答「運用代數符號記錄數學問題」之題目，無法正確地以代數式呈現；
2. 因未確實理解代數符號之性質，導致在「代數式的簡記」出現錯誤（如：將 $9x$ 誤解成 $9+x$ ），這也連帶影響解「代數式的求值」題型，出現解題困難。
3. 未能正確地將代數符號、數字做分別處理，導致進行代數式的合併與化簡錯誤。例如： $2x+6-7+3x$ 化簡後，得 $(2+6-7+3)+x$ 之錯誤結果。

補救教學上課教材為研究者自編，教材內容之編撰參考資料有：依據 107 年公布之「十二年國民基本教育課程綱要數學領域」編輯而成的翰林版國一上教師手冊、均一教育平台線上題庫。

二、研究限制

（一）研究者限制

研究者擔任本研究教學實驗的教師，同時也是教學觀察者、資料蒐集者，因此在進行研究過程中，較難面面俱到。

（二）學生背景

本研究的研究對象僅侷限於普通教育系統中的一般低成就兒童，學生均經過108年5月「國民小學及國民中學補救教學科技化評量數學科測驗」後，測驗成績未通過數學篩選測驗之門檻；特殊教育系統中的學習障礙低成就學生（智能障礙、情緒障礙、注意力缺陷等類型）不在本研究範圍內。

（三）研究時間限制

礙於時間、交通與人力考量，僅針對高雄市一所國中進行研究及訪談，並未涵蓋整個大高雄地區、臺灣其他縣、市、鄉（鎮）之國民中學、個案國中其他年級的學生。

（四）研究類推之限制

由於每所國民中學或不同年級階層實施數學科補救教學的客觀條件與實際情況會有差異，故本研究得到之結論，不宜進階推論至其他縣市學校或年級階層。



第二章 文獻探討

本章共分四節，第一節為補救教學之理念與方法，第二節為數學學習成就低落學生之補救教學，第三節為一元一次方程式及其解題錯誤類型，第四節為相關研究。

第一節 補救教學之理念與方法

一、理念

由於受到市場化、績效責任機制的影響，M 型化社會現象加劇，優勢階級與弱勢階級間享有的教育資源與機會的差距不斷地擴大，造成社會結構不平等，世界各國關注到此現象，紛紛推動教育補救方案（鄭勝耀，2011）。透過補救教學提供學生積極性的教育輔助資源，提升學習效能，鞏固基本學力，有效實現「教育公平」之理想，以達到促進「社會階層代間流動」之教育最終目標。

（一）教育公平性

洪麗瑜（2017）指出教育公平性為補救教學政策的核心理念；補救教學的概念是從教育公平性、教育機會均等與正義等概念衍生出來的。所謂的公平，就是不分性別、膚色、宗教、種族、家庭背景、社經地位等因素，人人應享有同等待遇，隱含著「等量對待」的概念。

重視教育公平性是因為牽涉到每人能分配到的教育資源，這影響個人未來的工作競爭力，然而教育成就是靠著個人天賦、後天努力所累積，不應受到社會階級所影響（陳俊宏，2016）。我國憲法有明文保障國民皆享有受國民教育的權利；聯合國教育、科學及文化組織（United Nations Educational Scientific and Cultural Organization，簡稱UNESCO）積極倡導「人人享有受教育的權利」之觀念；此外，聯合國的《反對教育歧視公約》中，也有提到「享有平等受教育的基本原則」。「教育公平性」意味著不分男女、膚色、等因素，每人享有習得基本技能之平等受教權，而不應被剝奪（楊怡姿，2017；Warnock, 1975）。

（二）教育機會均等

1970 年代是倡導「教育機會均等」理念的巔峰期（黃俊峰，2014）。甄曉蘭（2007）

指出，達成教育機會均等的理想有兩個重要宗旨，第一、為保障基本人權，落實社會公平；第二、培育優秀人才，促進社會進步與階級流動。

落實教育機會均等最著名的具體實例，就是美國總統於西元 2002 年實施《不讓任何一個孩子落後之法案》(No Child Left Behind Act of 2001, NCLB)。該法案的核心精神在於，不但要重視每位學童的學習表現（成效），更重要的是要積極協助輔導貧窮及弱勢的學生，改善他們學業成績低落的問題，不讓任何一位孩子學習落後（郭美滿，2015；鄭勝耀、林沛吟、許倬甄、王時培，2012）；該法案所訂立的目標為，在 2014 年前提升美國學童數學科和閱讀水平的學習成就表現，並達到該學生所就讀年級的程度，縮小與同儕之間的學業成績差距（蔡明學，2015）。該法案之實施對美國的基礎教育產生深遠影響，臺灣教育改革應可從中汲取精華，作為參照學習與借鑒的範本；西班牙、日本等國也有上述的相同理念（黃俊峰，2014），綜合上述，教育機會均等屬於基本人權，全球多數國家有著共通理念與想法。

柯爾曼(James.S. Coleman)於 1968 年提出「柯爾曼報告書」(Coleman Report)，是教育均等理念具指標性的著作（黃俊峰，2014），裡面提到三項教育均等的核心要素，如下：

1. 提供每位國民接受免費教育，並達到一定的教育水準程度；
2. 不區分學生出身背景優劣，皆提供每位學童相同課程學習；
3. 透過制度規劃設計，使來自不同社經背景的學童皆能在同一所學校就學。

社會中有許多處於社會或經濟中、低階層的弱勢學童，非常需要透過教育來翻轉貧窮處境，免於原生家庭經濟環境不佳的因素之限制，因此「窮不能窮教育」，我們絕不能讓那群孩子陷入永遠的貧困（張志明，2010）。教育初衷是希望每位學生都保有基礎學識，並非要求大家都成為金字塔尖端優秀學生（教育部，2015），因此政府建立課業輔導機制，讓弱勢家庭的孩子擁有基礎能力，藉由個人後天的努力耕耘，提高自身教育水準及成就，積極爭取在社會中向上流動的機會，獲得一份適合自身的工作，以跳脫先天背景及環境條件的框架，翻轉家庭地位，終止貧窮循環，提升生活品質；教育能使國家變得更富裕，同時可以提升整體的文化素質（Silver & Silver, 1991）。由此可知，個體的教育成就與未來的職涯發展、社會階級流動，每個環節有著緊密的關聯性（黃玉青，2015），提升教育程度，厚植實力，實現未來夢想，擺脫弱勢惡性循環的枷鎖。

教育機會均等為社會公平正義的重要指標之一（Nash, 2004）；教育機會均等在現實社會中僅是一種理想化的結果，因此必須配合相關補救或福利等多種政策，實施「差別待遇的教育政策」，朝公平正義的社會邁進（王家通，1998）。目前英國、美國、臺灣皆採取「積極性差別待遇」（positive discrimination）教育政策；英國〈普勞頓報告書〉（Plowden Report）（1967）政策主軸放在盡力協助教育資源貧乏地區的學童，提升他們的學習成效、學習適應力（鄭勝耀，2013），要求政府應該在教育方面提供積極性介入，幫助教育不利者（disadvantaged）（洪麗瑜，2012）；

美國學者約翰·羅爾斯(John Rawls)於1971發表一本具有里程碑意義的著作—《正義論》(*The Theory of Justice*)，書中以「正義即為公平」(Justice as fairness)的論點，導出了公平有兩項正義原則，分別為平等原則和自由原則，前者從社會資源分配不均、經濟不平等的觀點出發，認為每位公民應享有相同的機會與空間，發展自己的舞台，各項機會及職缺應公開消息，讓人民有均等機會去積極爭取，以落實機會平等原則(Rawls, 1971)。但要注意的是，落實機會平等原則時，也須顧慮社會中處境不佳的成員的權益與利益，這也呼應了「積極性差別待遇」的概念(洪儷瑜, 2017)。張志明(2010)指出，「積極性差別待遇」教育政策是藉由學校教育的各項方案推動，盡可能達成教育正義之目標，並透過學校教育系統可讓學生的學習成就，免於被原生家庭所擁有資本的強弱所控制，讓學生主體有公平的機會爭取應有的資源。

二、補救教學之政策沿革

擬定、施行補救教學政策，主要期望透過政策規劃並有效執行，幫助課業落後的學生將該學的內容達到應有的精熟度(林進材, 2018)。臺灣從民國 80 年代起，政府陸陸續續推出補救教學之相關政策，主要政策如下：1. 民國 85 年開始推動教育優先區，主要是補助原住民及離島地區學校辦理學生學習輔導；2. 民國 87 年開始推動潛能開發班，主要是進行學業輔導、生活輔導；3. 民國 94 年開始推動大專生輔導國中生課業之攜手計畫；4. 民國 100 年開始推動國民中小學及國民中學補救教學實施方案(洪儷瑜, 2012)。林進材(2018)指出，於 2006 年起開始實施「攜手計畫課後扶助」方案，現職教師、退休教師、大專院校學生投入教學行列，運用課餘時間實施小班或一對一的免費補救教學，希望透過補救策略，縮短學生學習落差的狀況。2011 年開始實施十二年國民基本教育，部分中學生可經由免試管道升讀高中(職)或五專的大門，但顧慮到不要讓參加免試入學學生因為沒有升學考試而忽略課業的學習，喪失應有的基本學力，然後運用補救教學機制讓他們的基礎學識都能維持在平均水準，成為現行教育制度的一大挑戰；教育部於 2013 年起推動「十二年國民基本教育配套措施之國民小學及國民中學補救教學實施方案」，整合前述計畫資源，制定「教育部補助國民小學及國民中學補救教學方案實施要點」(田建中, 2017)。

由洪儷瑜(2017)所述之臺灣補救教學相關政策可知：1. 我國非教育優先區的補救教學，在民國 94 年才出現，而且是由國中階段先開始，才逐漸往下涵蓋九年義務教學；2. 低成就之界定越來越明確客觀；3. 補救教學推動配套措施越來越完善；4. 補救教學品質監控越來越制度化；5. 採系統觀點，有整合各項政策，建立層級分工。

三、補救教學之實施模式

關於國中小補救教學實施模式，唐淑華（2013）提出「三層級補救教學（3-tier intervention）」的論點，我們可以想像成是一座參加補救教學課程的學生金字塔，將金字塔分成三等份：普通班級的教學為「補救教學中的第一層級」，老師主要是依據學生課堂學習表現提供適切輔導；「補救教學中的第二層級」是針對學習狀況不佳者以個別或團體方式，進行課後密集補強教學；對於「補救教學中第三層級」的學生，則接近特殊教育資源班的教學方式，不屬於本研究討論範圍。

余民寧與李昭鑒（2018）整合多位學者針對「第二層級補救教學－個別化教學」提出見解，學者們認為個別化教學和直接教學法是提升低成就學生最重要的方法；此外，個別化教學是評鑑補救教學優劣的重要指標；它可能會影響學生對課程內容的吸收程度，或是透過改變其自我歸因、內在動機等因素，進而提升學習成效的間接影響（Idol, 2010）。

蘇美麗、李永烈（2016）指出，補救教學分為三個層級：第一層級屬於一般補救教學，教學目標為單元內診斷補助，此層級的學生占約百分之八十；第二層級屬於本文所指稱的補救教學，約於民國 102 年開始出現，其教學目標是以基礎能力補救，此層級的學生占約百分之十五；第三層級屬於特殊教育抽離，教學目標是診斷教學，此層級的學生占整座金字塔約百分之五。

洪儷瑜（2012）指出，西方學者也提出學校和政府應建立三層級學習支援系統（3-tier learning support）或三層級補救教學（3-tier intervention），認為及早預防有助於降低低成就學生比例，與縮短達精熟學習的差距（如表 1），其說明如下：

1. 初級（一般）補救教學：為原班級學生接受正規課程的學習，人數佔約八成，其教學宗旨是希望達到核心課程教學卓越，並且讓普通班學生達到成功學習之目標；
2. 次級（個別化或小組）補救教學：為外加式的補救教學，其教學宗旨是藉由密集式介入，提升低成就學生學業成績，達到降低低成就學生人數比率之目標；
3. 三級（預防性）補救教學：小組或個別化進行教學，每天進行一次補救課程，每週課程時數合計約三至八小時，其目的是為達到預防低成就學生面臨學習失敗的困境。

表 1 三層級學習支援系統

層級	教學宗旨	比率	補救教學方式與密度
三級	預防低成就學生學習失敗。	5%	1.補救教學方式：每天、更密集。 2.密度：小組或個別化教學。
次級	1.提升低成就學生之成就。 2.減少低成就學生比例。	15%以下	1.補救教學方式：每天一次，每週三到八小時。 2.密度：小組或個別化教學。

核心課程教學卓越，讓 初級 普通班學生能成功學 習。	80%以下	1.補救教學方式：原班級。 2.密度：隨班或課餘無須刻意安排 補救時間。
----------------------------------	-------	--

資料來源：洪儷瑜（2012）。帶好每一個學生有效的補救教學（頁 14）。新北市：心理文化。

綜合上述，本研究所指稱的補救教學之實施模式為「次級補救教學」，學校針對數學低成就學生，利用放學後的第八節課以團體小班形式進行密集補救，針對「一元一次方程式－以符號列式與運算」之三項錯誤類型進行補救教學，拉近與同年級學生之程度。

四、補救教學之課程類型、課程設計原則

（一）補救教學之課程類型

張新仁（2001）、蔡金田與蔡政宗（2019）彙整一般補救教學之課程類型，包含六種如下：

1. 補償式課程（compensatory program）

實施補救教學之前，徹底瞭解學生的個別學習需求、能力水準，並且做完整的問題診斷，以學生的優勢能力作為改變教學策略的基礎。

2. 導生式課程（tutorial program）

為一對一教學或小組教學，教師將一般學校課程所提供的教材做再次複習，並舉更多相關例子，讓學生容易融會貫通。

3. 適性課程（adaptive program）

適性課程與正規課堂的課程、教學目標皆一樣，但差異點為適性課程的教學方式、考試方式較為彈性，教師可自編符合學生學習需求的教材，允許考試以筆試以外的方式進行測驗

4. 補充式課程（supplemental program）

為教導學生們一些學習策略、考試答題技巧，提升學習效能，或是提醒學生寫完作業後應檢查試卷，避免粗心而錯失分數。

5. 加強基礎課程（basic skills program）

補強學生於該學科的課堂中尚未習得的基礎知識概念，鞏固基本學力。

6. 學習策略訓練課程（learning strategies training program）

著重在個人學習方法的教學，包括：資料蒐集、整理之技能、記憶術等內容。

綜合上述，本研究所指稱的補救教學課程類型為「加強基礎課程」，其主要目的是為了幫助數學低成就學生，將過去數學課老師所教授而學生尚未習得的課程內容更加強化。

（二）補救教學課程設計之原則

杜正治（1993）、詹永名與王淑俐（2018）、蔡金田與蔡政宗（2019）提出五項一般補救教學課程設計原則，包含：分析基本能力、評量學科能力、評量學習動機、擬定課程目標以及課程設計內容宜考慮難度與增加趣味性，說明如下：

1. 分析基本能力

教師應預先將學生的心智能力，包含：注意力、理解力、記憶力等納入考量範圍，之後搭配教材、教法，教學成效才會顯著地被彰顯。

2. 評量學科能力

預先測試學生該學科的程度，作為課程設計之參考指標，而一般學科能力的評量多為成就評量。

3. 評量學習動機

教師應瞭解學生的學習動機強弱，分別做不同方式的處置，像是學習動機強的學生列為優先補救對象，然後再協助學習動機較弱的學生，提供更多的動機增強。

4. 擬定課程目標

擬定課程目標，「學習對象、學習內容、教學方法及評量方式」是必列出項目，上述幾項內容將會影響教師的教學方法與教學成效。

5. 課程內容之設計應考慮難度與增加趣味性

以學生切身相關的事物作為教學話題的起始點，引起學習動機；依學生程度調整課程內容難易度；若課程設計設具適當的挑戰，可增加課程趣味性，有助提升學生學習動機。

五、有效補救教學原則

李佩臻(2017)、洪儷瑜(2001)、許建銘(2012)、陳敏銓與徐綺穗(2017)；陳淑麗、曾世杰與洪儷瑜(2006)、簡淑真(2010)、鄭勝耀(2014)以及 Hall(2002)等多位學者提出有效補救教學原則，本研究歸納出六項，如下：

(一) 及早介入

從小一開始進行補救教學成效最佳，學童回歸到普通教育的機率越大，也是避免馬太效應及學習無助之情況發生。此外，有國外學者提出心智的國富論，其概念為教育是國家重要的心智財富，若補救教學及早介入，將節省大量的社會福利、安全等支出。

(二) 長期、密集式補救教學

同一科目一星期至少上課三次，至少持續介入一至兩年，成效才會彰顯出來，而且學生學習狀態比較穩固，較不容易回到普通班級以後又被送回補救班級。

(三) 考慮教材及作業難度

蔡金田與蔡政宗(2019)指出，教師在編撰或選定教材、派作業時，必須考慮到教材及作業難度，詳細說明如下：

1. 選擇難度適中的教材，設計難度適當的教學活動及作業。
2. 適當地提供鷹架，幫助學生增加成功機會，提升信心。
3. 當學生具一定基礎後，教師需適當地褪除鷹架，讓學生開始學習獨立完成作業的能力。

(四) 明示教學

低成就學童無法自行發現隱含的規則，因而須以明示教學，其學習成效越佳。其包含五大步驟：第一：教師示範給學生看；第二：師生共同合作完成；第三：褪除部分鷹架，學生試著完成學習任務，教師在旁協助；第四：褪除更多鷹架，教師在旁觀看學生完成學習任務；第五：由學生獨立完成學習任務。

（五）教導策略

教學起初應先示範給學生觀摩，建構鷹架，且不宜多步驟教學，之後開始出題目讓學生演練，但是要給予多一點提示，創造解題成功的經驗，之後漸漸褪除鷹架並加深學習難度，最後讓學生自主完成並示範一次給教師看，以確認是否達成標準。在課堂活動中使用符合學生能力差異的教材、教學策略、解題方式，協助學生的概念發展，讓師生間的教與學產生連結，達到學習進展幅度最大化的目標；此外，教師在有限的教學時間內，可依照學童程度，勾選部分、不同難易度的習題請學生現場演練。

（六）評量與績效

「評量」可更快診斷出學生對課程內容的精熟度與疑難方向，利於教師調整課程進度與內容難易度。

綜合上述，有效補救教學原則包含六項：及早介入、長期且密集補救、考慮教材及作業難度、明示教學、運用合適的教學策略、評量與績效。

學習一元一次方程式，是奠定學生「從算術思考（具體概念）進階到代數思考模式（抽象概念）」能力的重要歷程（Herscovics & Kieran, 1980），起初先從「以符號列式與運算」基礎單元學起，是為後續的「一元一次方程式運算」單元奠定基礎，以及銜接難度更高的代數單元學習，例如：一次不等式、因式分解、一元二次方程式等單元，據此彰顯出一元一次方程式「以符號列式與運算」單元及早介入、長時密集補救的重要性；此外，研究者依據學生程度，設計難度適中的「一元一次方程式－以符號列式與運算」單元的三項錯誤類型教材、作業單、評量卷，以及搭配明示教學、結構化的教學程序以及上述的教導策略，幫助概念澄清；然後，藉由多元評量檢核過去未建立的概念是否已建立，以及確認此三項錯誤類型的錯誤是否已完全被修正，並且找出學習缺失加以補強。

第二節 數學學習成就低落學生之補救教學

一、數學科補救教學之重要性

魏麗敏（1996）指出，數學是必要學習的最重要科目之一，學習數學不僅是兒童心智發展、邏輯思考能力的進步重要關鍵，同時和兒童潛能發展有密切關聯。數學低成就情形若未早期介入進行補救，數學問題將持續到中學，數學學習的問題不僅呈現在求學階段，也會深入影響學習者的成人生活(Cass, Cates, & Smith, 2003)。

根據教育部（2016）所發布的「十二年國民基本教育課程綱要－國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域（草案）」也指出學習數學的必要性：

1. 數學與文字、符號語言是有連結性的，便於人們簡潔、精確地表達意思；
2. 訓練演算、邏輯訓練、抽象思考等重要能力；
3. 奠定科學知識的基礎；
4. 培養使用多種計算工具之技能，例如：圓規、三角板、計算機、電腦多媒體等計算工具。

國際學生能力評估計畫（Programme for International Student Assessment, PISA）是由經濟合作暨發展組織（Organization for Economic Co-operation and Development；OECD）主導的研究計畫，用於測試學生學習水平，從 2000 年起每三年一個循環；臺灣從 2006 年開始參與，到 2012 年為止共參加 3 次。在數學素養方面的分析報告顯示，臺灣 2009 年 PISA 測驗中排名第五名，而 2012 年的平均分數 560 分，排名第四名，從名次表現可看出學生在數學素養方面是有進步的，但另一項數據顯示，在 2006 年的標準差為 103，2009 年的標準差提高至 105，位居全球第一，2012 年時更提高到 116，比差距第二大的國家（標準差為 105）高出許多，顯示臺灣學生數學個別差異有越來越大之現象；此外，PISA2012 結果指出，當年數學素養最低分數為 420 分，佔該水準或以上的臺灣學生人數百分比為 87.2%，顯示出數學素養差異較為明顯（林素微、王長勝，2016；蔡明學，2015）。

此外，有其他學者從 OECD 國際評量計畫（PISA）報告發現，臺灣於 2006 年第一次參加數學測驗，成績為等級二以下的學生佔 12.0%，等級五以上者佔 31.9%，然後參加 2009 年的第二次測驗結果發現，成績為等級二以下者佔 12.8%，等級五以上者佔 28.6%；2012 年第三次測驗結果發現，成績為等級二以下者佔 12.8%，等級五以上者佔 37.2%，由數據趨勢可觀察到雖然高分群人數增加，但是等級二以下的低分群學生仍然居高不下，可見學生學習差距是很大的，顯示出我國數學教育的一個警訊（朱家儀、黃秀霜、方建良，2014；許添明，2010）；依據國際數學與科學教育成就趨勢調查（Trends in International Mathematics and Science Study, TIMSS）結果指出，我國學生數學學習信心不足，而且學習成就兩極化亦趨明顯（王美娟、李美賢、李源順、陳怡仲、蘇意雯，2009）。

綜合上述，數學是七大領域中必學的科目，而國際研究顯示，臺灣學生的成績頂尖群和低成就差異化大，幫助數學低成就學生補救基礎學力，縮短兩群體間的程度落差其工作刻不容緩，也彰顯出實施數學科補救教學的重要性。

二、學習低成就的類型、成因、行為特徵

（一）類型

張新仁（2001）將須接受補救教學對象分為三種類型：第一類為學童課業成績表現比其應具有的能力水準還低，屬低成就者；第二類為學童的課業成績表現顯著低於該學生原班級的平均值，亦屬低成就者；第三類為學童學科成績不及格，而且其學業能力顯著地比其他學生弱，屬成績低落者。

（二）成因

王瓊珠（2017）、李麗君（2012）、陳淑麗（2009）、洪儷瑜（2001）指出，造成學生成就低落的成因有三種：

1. 個人內在因素：智能、學習障礙、感官缺陷等；
2. 環境因素：語言文化差異、社會地位低下、經濟不利、缺乏學習機會。但是處於社經、文化弱勢地區或家庭的學童不一定是低成就學生，但仍須接受補救的原因為他們屬低成就的高風險群，因此學校會協助做預防性補救；
3. 交互作用：即個人因素乘以環境因素，而個人因素的影響，必須視環境因素而定，或是環境因素的影響，必須視個人因素的影響而定，例如：缺乏成功經驗、概念模糊未釐清、錯誤的學習略等。

（三）行為特徵

林建平（2010）、黃永和（2013）、唐淑華（2013）、Diaz（1998）指出，數學學習成就低落學童的學習行為特徵：

1. 專注時間短、易分心及缺乏耐心，無法專心讀題、完成一道題目、從事多步驟計算；
2. 長期失敗的學習經驗，建構出負向的自我概念，導致學習動機低落；
3. 數學語彙不足，導致數學閱讀理解有困難，影響解題；
4. 保存數學概念、符號及運算公式方面有記憶困難，易忘記某些數學概念及演算程序；
5. 缺乏接收數學新知之積極動機，對學習數學產生抗拒之表現。

綜合上述，補救對象分為三種類型，造成學生低成就也具三種成因，包含：個人內在因素、環境因素、交互作用。此外，學習行為特徵包含：專注力不足、學習動機低落、數學先備知識不足等因素。

本研究的研究對象因「國民小學與國民中學科技化評量」數學科測驗成績沒有越過門檻，屬於上述低成就類型的第三種類型。班上學生其低成就之成因屬於「交互作用」造成的，主要成因包含環境因素與未打下良好的概念基礎：1. 環境因素：研究對象多來自社經弱勢（中低收入戶）家庭，家裡的經濟無法支持他們去參加課後補習，與其他多數同學相比，相對地錯過了許多的學習機會；2. 未建立良好的基礎概念：奠定代數基礎概念的初期，低成就學生就遇到困難了，對於一些重要概念一知半解，沒有把模糊的概念做正確的釐清，導致概念錯誤，答題錯誤率高，成績始終沒起色；研究對象專注力尚可，但因為概念模糊甚至有誤、記憶力有限、數學語彙不足等絆腳石，導致考試成績處於不理想狀態，失敗的學習經驗讓他們在學習數學時缺乏自信、學習動機低落。

三、影響學生數學學習之負面因素

參考國內多位學者提出負面影響學生數學學習表現之因素，說明如下：

（一）數學學習障礙與數學焦慮

部分學生在學習數學的過程中心裡會產生焦慮感及恐懼感，對在校數學科成績、生活中和數學相關活動之表現有所影響（黃思華、劉遠楨、顏莞婷，2010）。數學學習障礙之定義，指智力與一般學習能力皆正常，但是在數學概念、數量、符號方面有學習及運用的困難，通常會藉由專業的個別化標準測驗來鑑定，若有數學學習障礙，其「數學技能」得分結果會與標準值相差一段距離（王淑惠，2008；柯華葳，2005）。

趙文崇（2017）指出，根據臨床研究發現，數學學習障礙分成四大類型：

1. 數字符號辨識不能；
2. 計算障礙；
3. 數學理解障礙；
4. 數學運算障礙。

「數學焦慮（mathematics anxiety）」是指個體接觸有關數學的活動，例如：運用數字、解決數學問題等，心裡會有緊張、不安的心理感受，進而在數學學習上產生認知干擾，使得無法專心、耐心地進行運算或解題（魏麗敏，1988；Hembree, 1990）。此外，臺灣數學教育相當重視計算能力的培養，卻忽略了邏輯思考與概念理解，使學生所學是片段零碎的，缺乏組織架構，造成學生對數學產生焦慮與排斥（譚寧君，2017）。

綜合上述，造成數學學習障礙或焦慮的因素非常多元，教師必須先釐清學生的情況，才能用正確方式有效介入，引導學生排解焦慮情緒及克服學習障礙。

（二）對學習數學缺乏興趣

丁思與（2012）、梁淑坤（2017）、許建銘（2012）皆認為，學生對學習數學缺乏興趣會影響學習數學科的動機及學業成績，缺乏興趣的原因包含四種：

1. 考試成績及升學壓力：為考試而學習，使心理感到壓力與無趣；
2. 實用性不足：學生認為許多所學的知識很少機會應用到生活中，學習題材與生活經驗連結性低；
3. 教學者用傳統方法教授數學：學生覺得上數學課感到枯燥乏味，興趣缺缺，甚至逐漸產生排斥數學；
4. 教師本位的觀點：部分教師以自我為中心，忽略學生的感受，台上與台下缺乏互動，使學生感到教學很死板，覺得上課想睡覺。

綜合上述，學生經常為了應付考試而學習數學的知識內涵，卻沒有理解數學其中的趣味性與實用性，因此教師可適時帶入情境化教學，讓學生更能夠領悟數學知識更高層次的意涵。

四、教師於教學前、教學過程中相關注意事項

（一）教學前教師須注意的事項

教師應做充足的備課工作，熟悉教材地位，掌握整體學習脈絡，俾能快速掌握學生先備知識，以及如何與未來的學習做接軌。

（二）教學過程中教師須注意的事項

教師應優先著眼於學生數學概念的理解，培養正確邏輯思考能力，養成學生單步驟說明算式由來的習慣，確保有真正理解，之後讓學生分段完成練習題，熟稔後再強調計算技巧及強化解題速度，而非派給大量作業，使學生機械式練習解題找尋正確解答。教學過程中教師於正確時機點操作教具，是影響補救教學成效的關鍵之一，而使用教具的時機包括（王麗卿，2002）：

1. 學生注意力渙散、感到疲憊的時候；
2. 學生充滿求知慾望的時候；
3. 學生在學習過程中有疑惑、遭遇困難時；

4. 抓住學生知識需要昇華的時候；
5. 不同教學單元會產生新的概念，可以搭配相對應的教具教學。

綜合上述，善用教具能夠把抽象概念具體化，讓學生一目了然，但得注意的是，當需要教具輔助的單元時，應考慮到學生程度有個別差異，因此教師教學不要太早脫離情境與教具，以免流於程序操作模式。

五、數學課的教學模式、策略與獎勵措施

（一）運用多元的教學模式與策略

1. 設計競賽活動與實作機會

Burns（2003）指出，教學結合遊戲對學生的學習具正面影響，例如：遊戲競賽、動手操作教具等方式，使知識概念有效連結，避免學生死記、硬背，因為學生在遊戲中是一個主動參與的角色，不但能表達自我的想法，亦能自己建構知識。

2. 建立小老師制度

由程度較好的學生去教導學習表現較弱的學生，進而有同儕相互切磋、合作學習的機會，也讓當小老師的學生有榮譽感，上課會更加專心聽講，釐清模糊之處，激發學習動機（柯怡君、張靜馨，1995；陳彥廷，2015）。

3. 多層次提問

提問是引發學生認知衝突之過程，與思考的關係密切，因此教師應用多層次提問引起學生探索問題的動機，並給予充足的時間思考及回答，適時給予澄清問答，然後做歸納、總結，最後多鼓勵、讚美學生（張明恩，2015；鄭筱燕、潘欣蓉，2014）。

4. 段落性多元評量

課程內容每教完一個段落後，教師採多元評量檢核學習成果，有助於瞭解他們的學習情況，作為教學調整之依據。

5. 教師具備同理心與加倍耐心

若學生遇到學習瓶頸時，教師應運用同理心與耐心，換位思考，判斷哪裡出問題，並轉換教學策略，例如：引入情境教學並且善用實體或網路虛擬教具、圖解說明，為學生破除既有的錯誤概念，建立正確觀念。若沒有換位思考，單純以「程度較好學生」的邏輯思考來教學，一直重複用相同的教學方法與解釋，學生依然聽不懂，補救再多次也是枉然。

（二）建立獎勵措施

獎勵制度能使學生在課堂上專心聽講與配合教師的教學節奏，表現適當的行為，而且對良好的教室常規有很大的幫助（Jones, 1987），因此當學生課業表現良好或是有其他值得讚賞之處，應適時給予獎勵與正向評價，讓他們有學習成就感，進而對數學產生自信與興趣，在日後學習數學的道路上會加倍努力，得到老師更多的獎勵與讚賞。

歸納上述，研究者在教材中設計有趣的互動對話活動融入課程中，引起學習動機；本研究教授抽象概念時，會要求學生同時動手操作教具幫助理解；此外，每教完一小單元，研究者透過口頭問答、隨堂練習學習單、評量卷等，替換不同評量方式，檢核各位的學習成果，以確認學生數學概念錯誤類型是否修正，若還有概念錯誤則需要再繼續額外補強；研究者在課程期初指定一位學習表現良好的學生擔任數學小老師，協助老師與服務班上同學；研究者會視情況給予讚賞與獎勵，例如：評量後的表現不錯、小老師很盡責等。

第三節 一元一次方程式及其解題錯誤類型

本研究要補救的內容為「一元一次方程式—以符號列式與運算」之章節。研究者起初對本研究的數學低成就學生施測「一元一次方程式—以符號列式與運算」前測試卷，據答題結果分析、歸納出在本單元常出現的三項錯誤類型。此外，陳彥廷與柳賢（2009a、2009b）、郭汾派、林光賢與林福來（1989）、郭汾派（1988）、戴文賓與邱守榕（1999）、Booth（1988）等多位研究者也發現到，學生在學習一元一次方程式—代數符號也常出現如研究者所述的三項錯誤類型，包含：

1. 對於代數符號性質不理解，導致作答「運用代數符號記錄數學問題」之題目，無法正確地以代數式呈現；
2. 因未理解代數符號之性質，導致在「代數式的簡記」出現錯誤（如：將 $9x$ 誤解成 $9+x$ ），此錯誤連帶影響解「代數式的求值」題型，出現解題困難；
3. 因未能將代數式的係數與代數符號分別做處理，導致代數式的合併與化簡出現錯誤，例如： $4+a+7+b=11(a+b)$ 。

一、一元一次方程式之相關研究

代數即為運用抽象化變數與邏輯運算自動化函數關係，所形成的一套思維模式、解決問題的基本框架(林誌彥，2019)。美國數學教師協會(The National Council of Teachers of Mathematics，簡稱 NCTM)認為，代數學習強調「問題解決」及「運算技巧」兩面向(Schliemann, Carraher, Brizuela & Earnest, 2003)。洪有情(2009)指出，「代數」分為基礎代數、抽象代數，而高中以下教授的皆為基礎代數，代數的範疇包含：代數符號之概念、以代數符號列式、解方程式、解聯立方程式、函數、多項式、因式分解，由上述可知，方程式為代數的其中一環。

楊朝欽(2007)指出，代數的學習歷程如下：

1. 僅能用一般文字描述問題，未能用代數符號表達未知數；
2. 學會運用代數符號表示未知數，但未能列出代數式來表達一般式；
3. 學會運用代數符號表示未知數，且能用代數符號列出代數式並求解，已將代數視為處理數字關係以證明規則的工具；
4. 從代數符號的基本概念，學會列出代數式，並發展出函數概念。

(一) 代數符號的發展歷程

蕭宇欽(2006)指出，抽象化能力的培養要從代數符號、記號、圖形、數學語言等內容開始學起；代數符號列式是學習代數相關單元的基礎入門，因為代數符號列式的學習，是引導我們從既有具體數字概念出發，進階理解「含有非數字符號」算式的意義與運算操作，代數符號(例如： x 、 y 等)是用來當作未知數的表徵，它能夠提升解決數學問題的效率(李儼，1992)。由於每個人對於代數符號的概念有不同的理解和認識，因而做出不一樣的解釋，因此解決代數符號列式相關問題，每個人的難度認知也有所差異(王如敏，2004；邱婉茹，2001)。

綜合上述，代數符號與數學方程式有緊密的關聯性，而且代數符號也是人們解決生活問題的一種重要表達方式。

(二) 代數符號

Skemp(1987)指出，在概念形成過程中代數具重要功能，代數符號類似語言的概念，在不同語境代表的含意也不一樣，亦即，相同代數符號可能代表著一樣的事物，也有可能不同的代數符號代表同一樣事物，所以建立正確的代數符號概念很重要，假如缺乏正確概念，將衍生後續答題無法正確判讀代數符號代表的含義。洪健鋒(2016)認為，從算數進階到代數學習，建議學生先把數字當作代數符號來操作，知道兩者操作程序、結構方面有所不同，如此一來才能把代數式視為一個物件。

Collis (1975) 站在學生的角度把代數符號的概念分為六個層次如下 (引自陳彥廷與柳賢, 2009a) :

1. 層次一：視代數符號為一個可求出的值，例如： $x+3=8$ ，方程式中的 x 代表著某一個數值；
2. 層次二：指忽略代數符號而不用，例如：有些學生選擇直接忽略代數符號的存在，或是雖然有看到代數符號，卻不賦予任何意義，所以解題時不把代數符號條件納入考慮；
3. 層次三：視代數符號為一項物件的符號，例如：把一物件的名稱縮寫成一個代數符號來表示，例如：三角形的高用 h 表示；
4. 層次四：視代數符號為一項特定未知數，例如：有一個正三角形，假設每邊長為 m 公分，則周長為 $3m$ 公分；
5. 層次五：把代數符號當作「一般化數字」，而「一般化數字」是指一組有範圍的數值，並非代表單一數值；
6. 層次六：視代數符號為一項變數，也就是代數符號代表著一項不特定的值，例如： $3m$ 和 $6m$ 的大小比較。

Küchemnn (1981) 用紙筆測驗的方式，調查三千名英國的國中學生在代數方面的學習成就，藉由紙筆測驗結果分析他們對代數符號的認知，歸納成四種層次 (引自蔡淑裕, 2015) :

1. 層次一：進行代數符號的求值、忽略代數符號之能力；
2. 層次二：能初步處理進階的代數符號問題，但尚未能處理特定未知數、一般數或變數等問題；
3. 層次三：在簡單題目中，已能把代數符號視為特定未知數、一般數或變數；
4. 層次四：在更為複雜的題目中，已有能力把代數符號視為特定未知數、一般數或變數。

綜合上述，對照Collis提出的六個層次代數符號概念，研究對象對於代數符號的概念較符合層次一與層次二；而對照「Küchemnn歸納學生對代數符號的四種認知層次」，研究對象對代數符號的認知較屬於層次二、層次三所述的情形。而且從兩位學者提出的代數符號概念層次理論可得知，代數單元的概念的形成與發展是有程序性的，就如同蔡淑裕 (2015) 所說的，代數概念的建立需要需從抽象概念中找到其中的共同性，需經過意識、同化，乃至概念重建等程序，才能建立完整的概念；瞭解代數符號概念與認知層次以後，研究者能夠精確診斷學生的認知程度位在哪一層次，之後把那個概念層次當作教學的起始點，進行更高層次課程內容的補救教學，幫助學生藉由先備知識連結新知識，建立正確概念。

(三) 方程式

方程式是從代數符號概念衍生而來的，所以必須先瞭解代數符號的涵義，以利方程式的學習。國一學生學習一元一次方程式單元應習得的基本能力如下：

1. 式子的化簡及運算；
2. 一元一次方程式求解；
3. 解一元一次方程式應用題。

謝孟珊（2000）指出，影響方程式解題的因素包含以下六項：

1. 運算符號的性質及其個數；
2. 未知數出現的次數；
3. 求出來的值是否為整數
4. 係數大小；
5. 題目中是否含有小括號、中括號。

林誌彥（2019）、洪有情（2009）指出，代數思維分為程序性和結構性兩個構面，程序性指算術運算部分，例如：將數值代入代數式做運算，而結構性強調代數的運算規則，例如：代數符號簡記、代數式化簡、解方程式等。

蕭新雄、徐偉民（2017）指出，一元一次方程式解題歷程分為「列方程式」與「解方程式」，分述如下：

1. 列方程式：先假設未知數，接著以符號代表數字，之後整合出方程式；
2. 解方程式：先化簡運算，之後利用等量公理或移項法則求解。

所謂運用等量公理，即為運用加、減、乘、除法的等量公理解題技巧來解方程式；而移項法則即為當未知數從方程式等號的一邊移至另一邊，必須遵守「加、減法移項後符號會相反，乘、除法移項後符號會相反」的規則。

然而，郭輝煌（2014）指出，目前教授一元一次方程式解題方法，還是以等量公理或移項法則兩種方式為主流，坊間教科書則以等量公理為主流，然而多數人較偏好使用移項法則來解題，原因在於只要口訣記憶即可解方程式，但許多人卻不知

題目中「 $-$ 」的性質而造成混淆，例如： $-\frac{1}{3}x=12$ ，以為「負號移項變正號」，衍生出 $12 \div \frac{1}{3} = 36$ 之解題錯誤。

(四) 文字題

文字題又可為應用題或情境題，它是一種透過語文表達問題情境的考題型式（侯鳳秋、陳龍川，1999）。陳立倫（1999）認為文字題解題歷程很繁雜，從文字敘述轉譯成數字或式子，這並非單一運算符號就能完成，而是需要在文字與數字之

間的鴻溝搭建橋樑，此透露出文字與數字兩者能力整合的高困難度，也打破了過去許多人認為數學能力僅等同於運算能力的刻板印象；知識應用與基礎能力體現過去的能力培養，像是數學代數符號的理解能力、推理能力訓練、問題解決能力，以及學過的知識，兩者與自身的生活經驗做連結，這樣學到的才是有統整性的數學知識，而非零散的。楊金城（2005）認為，文字題出題宗旨是希望學生從個人生活經驗出發，察覺自身生活周遭有關數學的問題或知識，把它轉換成數學符號或語言，並將待解的數學問題形成數學問題之後，運用解題策略、溝通等方式進行解題，在解題結果回歸到原來的題目情境做評析與調整之步驟，把問題與解題一般化；林清山與張景媛（1994）對出數學應用題的見解或看法，如下：

1. 文字題是一種數學工具，也是一種解決非規則性問題的能力培養，學生能把學校所學的數學能力帶進未來生活、職場妥善運用；
2. 文字題的題目情境是用文字陳述呈現，問題的答案可由題目線索尋得答案；
3. 認為數學應用題是提供學生把生活經驗數學化的學習機會或過程；
4. 認為數學應用題為同時考驗語言轉譯、數學概念能力的一種出題型式，這樣的出題模式比起普通計算題的困難度艱難許多，需具備更高深的綜合能力，才有能力完成。

Vasquez（1982）指出，大部分學生做數學題時，看到文字題有很大的內心恐懼，而且也特別點名到國中學生最不喜歡數學應用題。詹士宜（2017）認為，有些數學低成就的學生時常因為看到題目文字冗長，內心感到恐懼而選擇逃避跳題，其為可能是看不懂文字敘述，也可能因題目敘述包含了一些數字、單位，而數字可能會因存在於句子中的位置不同，產生出不同意義，解題方式也會有所差異，若學生題意分析時沒能判斷題目關鍵字或抓住線索，容易被題目中不相干的信息干擾，發生解題錯誤之情形。

詹士宜（2017）分析學生在每個解題歷程可能會碰到的困難點，並提供教師相關教學對策，分述如下：

1. 解題前，下文屬閱讀理解階段。當學生有「閱讀理解困難、不瞭解數值間的關係」等困難，教師可幫助學生簡化問題，使他們對題意有概念；
2. 解題中，下文屬「列式或圖示表徵階段」、「執行運算階段」，學生若有不會列式而無法作答之困難，教師可畫圖示幫助理解題意並列式；
3. 解題後，下文屬「驗證階段」。許多學生計算後忘記加單位，或是計算錯誤，教師可增加填答單位的空格與驗算方框，提醒單位註記、再次驗算。

綜合所述，對數學學習低成就學生來說，文字題是他們做數學花費最多時間，卻很難拿高分的部分，原因在於數學文字題解題與語文能力相互牽絆。文字題題目組成元素非常多元，像是數字、語句、概念等多項元素，考驗著數學、語文、邏輯思考能力併用，必需結合所學的數學概念、基本計算能力、良好的語意理解能力解題，因此假使前一階段的數學概念沒學好，或是計算能力不佳、閱讀理解有障礙，可能會阻礙文字題的解題。

二、錯誤類型的理論

(一) 錯誤類型之定義

林清山與張景媛(1994)、張鳳燕(1991)、Babbitt(1990)、Kathleen(1987)等人認為，錯誤類型是指在處理某單元(主題)的數學問題時，可能會出現多種可能性的錯誤，我們根據每一種不同錯誤的關鍵因素或錯誤特徵，把它一一分類，每一種被分類出來的錯誤被視為一種錯誤類型。

(二) 錯誤之成因

黃淑華、鄭鈴華、王又禾與吳昭容(2014)以及蕭芷芸、陳彥廷與陳中川(2017)、Blosser(1987)等人指出，學生答題出現錯誤其可能成因如下：

1. 先備知識已深根腦部知識網，會影響學科概念的學習與建構，假使先備概念有誤，容易導致解題錯誤；
2. 學科背景知識不足、學科概念發展不完全，缺乏連貫性與完整的知識體系；
3. 把類似概念同化或類比錯誤，進而產生混淆與誤解；
4. 閱讀能力低落，誤解題意或掌握不到題目關鍵字；
5. 不合邏輯的推理；
6. 使用不當的運算規則或解題策略；
7. 解題後未驗算，計算過程有誤或疏忽題目提供的限定條件。

(三) 錯誤類型之分類

在學習數學的歷程中，運算式中出现瑕疵導致解題錯誤是必經過程。透過不斷嘗試與摸索，從錯誤中找尋錯誤原因，學習許多寶貴知識，然而出現錯誤都必有其原因所在，因此，許多國內外的學者投入有關錯誤類型的研究，並且將錯誤類型做分類。

Engelhardt(1982)認為錯誤類型分為四種：

1. 機械性的錯誤：因知覺動作困難造成錯誤發生；
2. 過程性之錯誤：因操作程序有誤，或操作過程中某環節出錯；
3. 概念化錯誤：因缺乏概念或建立錯誤概念，所導致的錯誤；
4. 因個人疏忽、粗心大意所導致的錯誤。

李芳樂(1993)及 Maurer(1987)將上述分類精簡為兩種：

1. 系統性錯誤：指因學到錯誤觀念導致應用到解題時有誤，此種錯誤類型若未確實修正，可能會是一個永久性錯誤；

2. 隨機型錯誤：因疏忽、粗心而出現錯誤，此種錯誤可能會不定時的反覆發生。

綜合九章出版社編輯部（1995）提出的數學解題錯誤類型，歸納成三項：

1. 因概念不清楚造成解題錯誤：未確實弄清楚及未建立正確概念，不當地把類似概念同化或類比錯誤，產生概念混淆與誤解，進而解題有誤；
2. 邏輯推理過程有瑕疵：公式推理過程有瑕疵、循環論證、論證不足等因素；
3. 題目條件考慮未周全：像是未考慮到所使用的特定定理、公式其適用條件、忽略題目要求特定的取值範圍等因素產生的錯誤。

秦麗花（1995）將數學解題錯誤類型分為：

1. 未做答案驗證步驟，忽略答案合理性；
2. 基本概念與運算公式不清，而盲目運算；
3. 缺乏解題能力與作答動機。

Marshall（1985）將解題錯誤類型分六種：

1. 處理語言訊息的錯誤；
2. 解釋空間訊息的錯誤；
3. 選擇適當步驟的錯誤；
4. 概念連結的錯誤；
5. 應用到題目不相關的訊息；
6. 作答時分心。

Mayer（1985）將解題錯誤類型分三種：

1. 遺漏的錯誤：遺漏掉題目提供的某部分資訊或條件所造成的錯誤；
2. 細節的錯誤：例如題目需要單位轉換才能進行計算，但因忽略該細節而直接計算；
3. 轉換錯誤：無法將關係句的型式，轉換成陳述句。

Movshovitz-Hadar, Zaslavsky & Inbar（1987）經實徵研究後，提出六項數學錯誤類型：

1. 誤用訊息：誤用信息可能發生在訊息整合或訊息加工階段，錯誤原因可能為解題過程中忽略了題目提供某些必要的訊息，而自己額外添加了不相干的解題元素，泥補被忽略的重要訊息；
2. 曲解語言：解題過程中因對題目提供的訊息有理解錯誤，因此在「把題目提供的訊息，轉換成數學代數符號、方程式等」其過程出現錯誤；
3. 無效的邏輯推理：對題意的推理有誤，或是在推理過程中，因忽略題目未提供的一些數學定理或條件，造成解題錯誤；
4. 解題後未做驗算：解題後因未經驗算、重複檢驗，可能因計算過程有誤，或是計算後因忽略題目提供的特定條件或是解的合理性，未滿足題目的要求而有誤；

5. 扭曲定理或定義：誤解定理或定義，或是誤用公式，或是誤用分配律導致運算過程有誤；

6. 技能上的錯誤：像是圖表題資訊解讀有誤，或是操作代數符號有誤，或是基本加減乘除運算過程有差錯。

綜合上述，本研究指的錯誤類型屬概念化錯誤與系統性錯誤，因未建立正確的代數符號概念，導致「代數式簡記、代數式合併與化簡」過程有誤。

三、一元一次方程式答題的錯誤類型

(一) 有關代數符號的錯誤類型

參考陳彥廷與柳賢(2009a)、郭汾派、林光賢與林福來(1989)、郭汾派(1988)、楊素琴(2012)、戴文賓與邱守榕(1999)、Booth(1988)等多篇文獻，歸納出國中生在代數符號相關題目之解題，主要有 11 項錯誤類型：

1. 未理解運算符號與代數符號之使用方式，導致後續一連串的計算錯誤

學生因缺乏數感，導致未能理解運算符號、代數符號之意義及使用方式，因此學習代數符號應連結學生有關「數量關係」的生活經驗，培養觀察數量關係與呈現數量關係之能力。

2. 未能將係數、代數符號分別處理

代數式化簡的正確解題方式為，把含有代數符號的合併、化簡，然後單純只有數字的合併一起做運算，然而學生因不理解代數符號的運算規則，誤解成將不同類項的係數先合併、計算，再將代數符號置於數字後方。假設題目為 $5x+3y+4x+2y$ ，學生可能的合併過程與合併結果如下：

$$(1) (5+3+4+2) + x+y = 14+x+y;$$

$$(2) (5+3+4+2) xy = 14xy;$$

$$(3) (5+3+4+2) + xy = 14+xy;$$

$$(4) (5+3+4+2) + (x+y) = 14(x+y)。$$

3. 數字代入後仍保留代數符號

假設題目為「設 $y=-3$ ，則 $4y+5y$ 等於多少？」，學生認為 y 是一個代數符號，不能隨意去除，所以代入數字後 y 符號仍保留，而有 $4 \times (-3)y + 5 \times (-3)y = -27y$ 的答案。

4. 認為式子化簡後的結果為「單項式」的型式

例如：某道題目經化簡後正確答案為 $3x+2y$ ，然而有些學生認為「化簡結果應該長得像單項式的型式，不可能化簡後還剩兩項」的錯誤概念，所以又繼續做化簡，使得答案變成 $5xy$ 。

5. 把不同類項一起合併，進行運算

不清楚同類項之意義及其合併規則，導致同類項係數合併錯誤。假設題目為 $3x+x+x+x+y$ 要求同類項合併，學生合併後的結果可能為 $7xy$ 。

6. 未按題目的條件做運算

假設題目為 $x+y=15$ ，且 $x<y$ ，試求 x ，學生的答案結果為 $x=15-y$ ，而忽略了 $x<y$ 的特定條件；或是假設題目為「設 $y=-3$ ，則 $4y+5y$ 等於多少？」，學生只算到 $4y+5y=9y$ 的步驟，卻未按題目條件把 $y=-3$ 代入 $9y$ 進行下一步驟的運算。

7. 未將後項先加上括號，而直接進行化簡

未先加上括號就直接進行化簡，假設題目為 $C = ax + b$ ， $D = ex + f$ ，試問 $C-D$ 化簡後的式子為何？學生會因 $ex + f$ 未加上括號再進行化簡，導致運算過程為 $ax + b - ex + f$ ， $+f$ 未變為 $-f$ ，化簡結果錯誤。

8. 使用分配律化簡代數式發生錯誤

學生進行分配律化簡代數式時，誤以為只需要把括號前的數字與括號內第一項數字相乘，然後沒有繼續和第二項相乘，運算過程不完整造成錯誤。假設有道題目為 $3 \times (x+2)$ ，學生僅處理括號內的第一項，而未繼續處理完括號內的第二項，導致計算後得出 $3x+2$ 之錯誤結果。

9. 正、負符號出現錯誤

對含有負號的數字運算不熟悉，未將兩項負數一起運算時做變號動作，導致代數符號簡記或合併產生錯誤。假設題目為 $(3x+2y) - (-5x+4y)$ ，卻未將「 $-5x$ 轉換為 $+5x$ 」，導致運算過程為 $3x+2y-5x-4y$ ，進而得出 $-2x-2y$ 之錯誤結果。

10. 代數符號簡記錯誤

假設題目為簡記 $x \times (-5)$ 這個式子，學生認為簡記就是把「 $\times$ 」省略即可，所以簡記結果為 $x-5$ 。

11. 分數型的式子化簡過程有誤

假設題目為 $\frac{3}{7}x \div (-\frac{1}{2})$ 化簡後為何？第一種錯誤類型，把後項倒數後未加上負號，變成 $\frac{3}{7}x \times (\frac{2}{1}) = \frac{6}{7}x$ ；第二種錯誤類型，分數除法概念有誤，其計算過程為 $\frac{7}{3}x \times (-\frac{1}{2}) = -\frac{7}{6}$ 或是 $\frac{3}{7}x \times (-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{14}x$ 。

(二) 有關方程式的錯誤類型

本研究參考王如敏（2004）、邱婉茹（2001）、戴文賓與邱守榕（1999）等多篇文獻，歸納出國中生在方程式相關題目之解題，主要有 6 項錯誤類型：

1. 移項法則使用錯誤

假設題目為 $7x + 20 = 30$ ，式子經整理後為 $7x = 10$ ，因移項法則使用錯誤，求得 $x = \frac{7}{10}$ 之錯解；假設題目為 $(2x - 5) - 3(4x + 6) = 7$ ，因上述錯誤，式子整理後為 $-10x = -30$ ，求得 $\frac{1}{3}$ 之錯解。

2. 解一元一次方程式時，移項後未變號

假設題目為 $8x + 40 = 16x - 16$ ，學生的運算過程為 $16x - 8x = 40 - 16$ ，因「 -16 」移項後未變號，下一步驟得出 $8x = 24$ 的結果，進而解出錯誤答案。

3. 四則運算過程有誤

包含「方程式內含多重括號，其運算的先後順序」有誤，或是「正、負符號變號」過程有誤。

4. 分配律使用過程不恰當

假設題目為 $(2x - 5) - 3(4x + 6) = 7$ ，因分配律使用不恰當， (-3) 僅乘括號內的第一項，括號內的第二項未處理，也就是未將 (-3) 乘以 6，得出 $2x - 5 - 12x + 6 = 7$ ， $-10x = -6$ ，最後求出 $x = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ 的錯誤解答。

5. 分數型的一元一次方程式求解，移項法則使用錯誤

假設題目為 $\frac{7}{12}x = \frac{7}{6}$ ，學生因移項法則使用錯誤，其運算過程為 $x = \frac{7}{12} \div \frac{7}{6}$ ，得出 $x = \frac{1}{2}$ 的錯誤答案。

6. 分數型一元一次方程式求解，其運算過程有誤

通分過程有誤起因於學生缺乏等值分數的概念，假設題目為 $\frac{3-x}{6} = \frac{x+11}{8}$ ，第一種錯誤類型為，通分後分母錯誤，連帶分子也錯誤，無法將分數通分為 $\frac{4(3-x)}{24} = \frac{3(x+11)}{24}$ ；第二種錯誤類型為，通分後分母是正確的，但分子卻未和分母乘以相同數字，導致通分結果為 $\frac{(3-x)}{24} = \frac{(x+11)}{24}$ ，求出來的值是錯的；第三種錯誤類型，假設題目為 $\frac{4}{5}(x-2) = \frac{1}{3}x + 1$ 未將右邊項先加上括號再移項，學生的運算過程為 $\frac{4}{5}(x-2) - \frac{1}{3}x + 1 = 0$ ，導致式子求出來的值是錯的。

經參考多篇文獻後，更瞭解學生於一元一次方程式「有關代數符號」的錯誤類型有哪些，本研究也根據上述歸納出研究對象常出現的錯誤類型，如下：

1. 對於代數符號之性質不理解，導致作答「運用代數符號記錄數學問題」之題目，無法正確地以代數式呈現；
2. 因未確實理解代數符號之性質，導致在「代數式的簡記」出現錯誤（如：將 $9x$ 誤解成 $9+x$ ），這也連帶影響解「代數式求值」題型，出現解題困難。
3. 因未能將代數式的係數與文字分別做處理，導致在代數式的合併與化簡出現錯誤，例如： $4+x+7+y=11(x+y)$ 。

第四節 相關研究

一、國內相關實徵研究

王如敏（2004）提出「國二學生解一元一次方程式錯誤類型分析研究」，探究國中八年級學生於一元一次方程式應用題解題情形，並分析其基礎概念有哪些錯誤類型、錯誤原因；研究對象是從原臺南縣國中挑出兩間學校，對 180 位八年級學生進行兩階段施測，首階段測驗為研究者自編的「一元一次方程式基本概念」試卷，之後根據首階段測驗結果選出 108 位學生作為研究樣本，把 108 位學生分成高分組、中間組、低分組，每一組皆為 36 人，接著將每組同一層級的學生再隨機分成兩組，每組各 18 人進行次階段測驗，依照分組分別進行傳統式應用問題測驗與引導式應用問題測驗；研究發現：1. 應用題解題情形—不同數學程度的學生在應用題解題表現有明顯差異，程度佳的組別不論接受傳統式測驗或引導式測驗，皆有很高的得分率，但是程度較弱的組別，無論接受哪一種測驗，得分率表現依然不理想，明顯偏低。2. 基礎概念錯誤類型：（1）代數符號之意義；（2）一元一次方程式之認識、列式及求值；（3）代數符號簡記；（4）設代數符號為特定未知數或特定值；（5）列式運算。3. 基礎概念錯誤原因：（1）只會死板操作數學符號，卻缺乏對代數符號的理解；（2）對數學專有名詞不是很瞭解；（3）不知代數應如何簡記；（4）數字代入代數符號後，仍然保留代數符號；（5）文字敘述轉譯成數學符號或方程式有困難；（6）除去括號過程發生錯誤。

王毓玲（2015）提出「大臺中地區國中一年級學生一元一次方程式應用題的解題歷程分析」，從任教國中挑選六位國一學生作為研究對象，分為高分組、中間組、低成就三組，在從中各挑兩名學生；本研究旨在探討以下三個問題：1. 他們在一元一次方程式應用題的解題歷程為何？2. 一元一次方程式應用題解題會運用到哪些解題策略？3. 一元一次方程式應用題解題成敗關鍵因素為何？研究發現：1. 受試者皆運用了閱讀題目、分析題目、擬定解題策略、執行計畫四大步驟，僅少數受試者有進行驗證評估程序；2. 高分組、中間組及低分組學生共同採用的解題策略為提取數學經驗、運用代數法、直觀法，唯不同的是，低成就學生多運用一項圖解法。3. 根據上述第三項研究問題，解題成敗關鍵因素很廣泛，包括：受試者的語意知識、數學背景知識、解題策略、情意態度等面向。

陳彥廷、柳賢（2009a）為一個案研究，研究對象是某個案國中七年級學生，共 76 位學生，分別來自兩個不同班級，本研究旨在探討運用代數符號語意測驗及語意流程圖晤談之方式，「研究對象對代數式裡面的代數符號，其語意理解」的程度，和「研究對象的代數符號語意理解表現」的一致性。研究結果發現：1. 研究對象對於「代數符號代表特定數」之類型的理解較穩固；2. 研究對象對於「代數符

號代表特定未知數」、「代數符號代表一般數」兩種類型不是很熟悉；3. 運用測驗及語意流程圖晤談之方式後，實驗結果顯示，不同層次的研究對象對代數式裡面的代數符號其語意理解表現有一致性。

楊淑如（2016）提出「國中生一元一次方程式補救教學研究」，以臺東縣某校七位國一「一元一次方程式」低成就學生為研究對象，針對本單元概念不清或運算式中常出現錯誤之處，例如：代數符號之意義理解、一元一次方程式之基本運算規則等處進行補救，探討經補救後對學生在本單元的影響為何；研究發現：1. 一堂課僅教授一項概念，能達到良好的教學成效；2. 操作實體教具表達抽象概念，學生能更容易概念理解；3. 可藉由遊戲模式做學習檢核，學生較不易出現抗拒情緒；4. 補救後學生答題錯誤率大幅降低，程度明顯進步，而且學習態度方面有大幅的正向改變。

蔡淑裕（2015）提出「國中生在代數符號的概念與運算上的主要錯誤類型及其補救教學之研究」，以任教班級 16 位學生為研究對象，探討「以符號代表數」、「用代數符號列式」、「以分配律去括號化簡代數式」、「代數式的加減運算及化簡」等四大主題補救教學後，學生之前常出現的錯誤改善情況為何；研究發現：1. 經補救教學後，每位學生後測的錯誤率明顯低於前測；2. 經補救後，學生在四大主題中過去常出現的錯誤有明顯減少。

蕭新雄、徐偉民（2017）參考多篇相關文獻後，統整出兩種多數學生學習「一元一次方程式」時，所遇到的常見問題及其問題成因：1. 學生沒有確實瞭解代數符號及其運算的意義，純粹硬記運算規則；2. 學生認為過多的抽象符號運算覺得學習很無趣，產生排斥學習本單元，因此本研究針對上述兩點問題，提出一元一次方程式補救教材的設計理念、設計教材應考慮的面向、研究者分享教材研發之範例。以「奠基」作為教材設計宗旨：所謂「奠基」是指「具像有感」、「活潑有趣」，也就是說，教師讓學生藉由具體實物操作習得數學概念，以及教師所研發的教材內容盡可能活潑生動、融入情境教學，驅使學生的學習慾望；本研究設計教材所考量的面向如下：1. 教材架構：教材編排順序應為簡單到困難，解題步驟簡約到繁複；2. 教學策略：運用布魯納提出的表徵理論概念，先讓學生從實體物品操作（托盤、彈珠、小瓶子），建立解決問題的先備知識，之後再退一層鷹架，將實體物品更換成圖像卡片操作，表徵更複雜問題，最後慢慢引導學生進入抽象符號表徵的學習，步步為營的結構化教學，讓學生得以建構完整概念；3. 問題選編：選編問題需掌握兩大原則—「題目切勿偏離本單元的代數運算、問題解決概念」與「題目陳述的情境必須是數學低成就學生可操作、能理解的」。

黃淑華、黃鈴華、王又禾、吳昭容（2014）提出「一元一次方程式應用問題的補救教學」，其中內文提到列代數式的概念分析與教學策略，當學生遇到「A 班人數 25 人，A 班比 B 班多 6 人，請問 B 班多少人？」這類基準量未知的比較題，學生經常有無法判斷該用加法還是減法之困擾，教學者可先從數值實例出發，來引導

學生掌握誰減誰未必是依照句子中出現的順序，而是要用大數減小數列式與計算；此外，教師可運用數到式的類化，並整合圖像記錄策略指導學生列代數式；文字題語意所指的數量關係經常是解題困難所在之處，建議教學時可先將題目敘述一次，使學生心中對題意有初略印象後，指導學生分句閱讀，簡易圖示一句一句的題意，以建構出整體數量關係。

二、對本研究的啟示

（一）相關實徵研究結論

綜觀上述相關研究資料，研究者歸納出以下幾點發現：

1. 一元一次方程式常見的錯誤類型有：
 - （1）代數符號之意義與列式；
 - （2）代數符號簡記錯誤；
 - （3）文字轉譯成式子出現錯誤；
 - （4）一元一次方程式列式；
 - （5）解一元一次方程式未知數出現錯誤；
 - （6）將題目指定的數字代入未知數後，其未知數符號仍存在；
 - （7）未按「先處理小括號中的內容，再處理中括號裡的內容」之先後順序；
 - （8）因正、負符號應變號而未變號，造成計算錯誤。
2. 導致概念錯誤的原因：
 - （1）沒有真正理解代數符號的意義，且死記數學符號運算規則（流程），然後寫題目時沒辦法將所學概念拿出來靈活運用；
 - （2）沒有系統的記憶數學專有名詞、概念，學習過程缺乏條理的整合與分析，將現行學的內容與之前學過的類似名詞或概念弄混淆；
 - （3）不理解如何將「代數符號假設為特定未知數或特定值」；
 - （4）看不懂題目的意思，所以無法依照題目指示將文字敘述轉譯成式子；
 - （5）四則運算規則沒有達到精熟，然後除去括號的過程有誤，所以常常運算過程會有步驟的疏忽，或正、負符號未變號。
3. 一元一次方程式應用題解題，常使用的解題策略及步驟：
 - （1）先閱讀題目內容；
 - （2）分項解析題意；
 - （3）思考應運用哪些概念或公式來解題；
 - （4）開始列式、解題；
 - （5）檢查及驗算（僅少數人有做到這項步驟）。

4. 課程教學可添加一些強化「讀題及分析題意的技巧、數學背景知識、代數符號的語意理解」的訓練，減少學生應用題解題失敗的機會。

5. 設計一元一次方程式補救教學教材，應掌握教材難度由簡入深的原則。

6. 一元一次方程式以符號列式與運算解題錯誤之教學策略：

(1) 教學者先幫學生重新釐清該單元的基本概念後，利用具體題目以提問方式引導學生思考，並搭配圖像呈現，使其學會解題策略；

(2) 教師可善用「數到式的類化」、「用文字呈現對題意的理解」、「把題目要表達的內容用圖示或實體教具呈現，更加具體化」三項教學策略，引導語意理解能力偏弱的學生解一元一次方程式文字題。

(二) 對本研究的啟示

1. 經探討國內多篇相關實徵研究以後，本研究綜合過去多位研究者所使用過，然後教學成效也不錯的做法，或是經實徵研究後提出可行又有效的論點或做法，包含教學方式、教學策略與技巧、教學程序、教材設計應考慮的注意事項等面向，採集各個值得參考與學習之處，實際運用到教學現場，同時也特別留意文獻中特別提點到的教學細節，期盼能達到有效補救「一元一次方程式—以符號列式與運算」之目標。
2. 綜合相關研究提出的論點，學生之所以有概念錯誤，一個關鍵因素為，學生持著「只要把概念背起來應該就會運算」的心態，囫圇吞棗的學習方式，沒有把所學的概念知識百分百理解，所以這也會衍生出當題目只要有稍微變化或是需要運用多重概念才能解題，就會出現解題困難，甚至試題當中有陷阱題，就更難找出細微的陷阱之處了。據此，研究者會嚴格要求學生每一項概念的來龍去脈有確實理解、吸收內化，並嚴謹地檢驗理解程度，再視情況加以補強。
3. 可以每教完一項觀念後，立即讓學生進行隨堂練習，瞭解所學概念如何應用到試題，以及考題的出題方向，以因應未來的國中會考。
4. 學生因不瞭解代數符號的性質，導致後續在「運用代數符號記錄數學問題」、「代數式的簡記與求值」、「代數式的係數與文字分別做處理」等代數符號相關題型，常出現一連串解題錯誤現象。
5. 嘗試在一元一次方程式補救教學教材中，設計人物口語對白融入數學概念，使教材內容更加生動有趣，提升學習動機。

第三章 研究設計與實施

本章共分七節，第一節為研究架構與流程，第二節為研究場域與對象，第三節為研究方法，第四節為研究設計，第五節為研究工具，第六節為資料處理與分析，第七節為教育研究倫理。

第一節 研究架構與流程

一、研究架構

本研究旨在探討七年級學生接受「一元一次方程式－以符號列式與運算」三項錯誤類型補救教學之成效，依據研究目的與研究問題，研究者蒐集相關文獻並提出本研究架構（如圖 1）。

從圖 1 可知，本研究以「一元一次方程式－以符號列式與運算」三項錯誤類型為補救教學介入主題，此三項錯誤類型是從研究對象前測試卷答題結果分析、歸納後得出。此外，陳彥廷與柳賢（2009a、2009b）、郭汾派、林光賢與林福來（1989）、郭汾派（1988）、戴文賓與邱守榕（1999）、Booth（1988）等多位研究者也發現到，學生作答「一元一次方程式－符號列式與運算」考題也常出現如研究者所述的三項錯誤類型。接著再以「上課教材」、「上課流程」、「教學策略」作為控制變項，進行教學實驗補救錯誤概念，探究補救教學之成效。

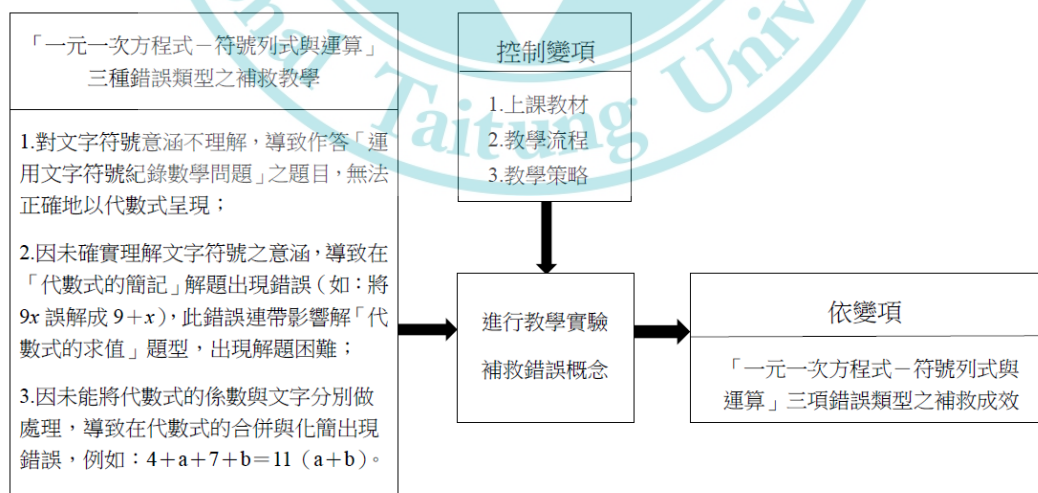


圖 1 研究架構圖

二、研究流程

研究流程如圖 2 所示：

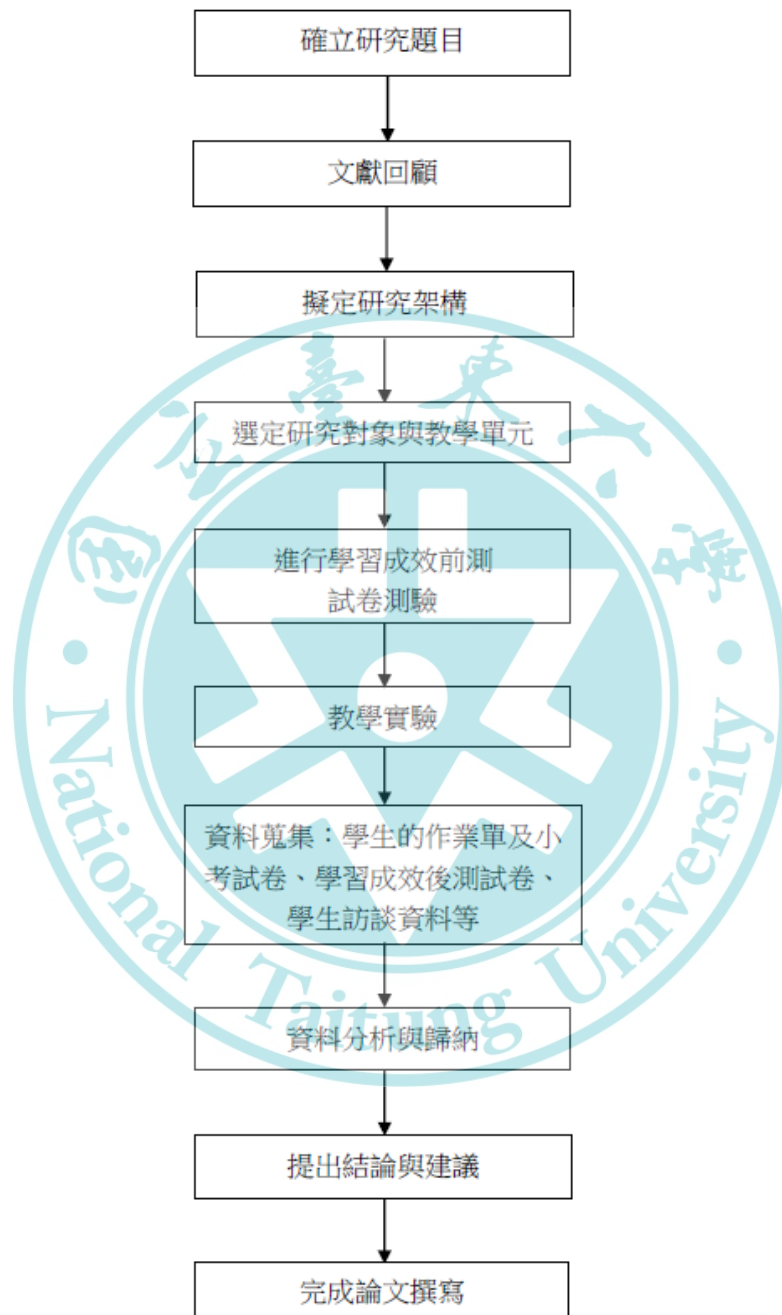


圖 2 研究流程圖

第二節 研究場域與對象

一、研究參與者

(一) 研究者本身

研究者為國立臺東大學教育學系課程與教學碩士班研究生，本身具備「教育部補救教學培訓 18 小時研習證明」，研究者利用平時放學後的第八節課時間、寒暑假到公立學校擔任數學科補救教學教師，教學經驗以國一數學科為主；教學準備部分，研究者平時利用各版本教科書蒐集題庫、均一教育平台線上題庫、教育部國中數學基本學習內容補救教材等資料備課，並研究考題類型與趨勢，因此對國一數學補救教學領域頗為熟悉，因此以數學科補救教學為論文研究方向。

(二) 學生

本研究採立意取樣，依教育部 2018 年公布《教育部國民及學前教育署辦理補救教學作業要點》，於高雄市一所國中七年級數學科學習低成就為班上後 35% 之學生參與數學補救教學課程。本研究對象共有五名學生，皆為新接觸學生，學生起初對教學者有一股陌生感、防備心比較重，為了能夠盡快與班上學生融入，研究者用活潑的對話方式、渴望理解學生的心，學生就比較主動傾訴個人想法；為有效管理班級秩序，提升教學流暢度，研究者在課堂前就先和學生約定課堂規則與繳交作業規定，教學者遵守賞罰分明原則，學生也會自律遵守規定；經過一段時間相處後，研究者能夠掌握每位學生的個性及學習狀態；研究者詢問、整理後，五名學生之背景簡介與概念錯誤類型（如表 2 至表 6）：

表 2 S1 (男) 研究參與者背景分析與概念錯誤類型

背景分析	概念錯誤類型
1.個性與平時表現：個性活潑，平時與同學有良好互動。	1.長方形周長的計算公式概念錯誤導致答題錯誤。
2.學習意願：因家庭因素，需時常幫忙家庭事業，較無心在課業上，學習意願低。	2.認為式子化簡結果為「單項式」的型式。
3.平時的成績表現：課業成績落在班上後段。	3.未能正確判斷「倍數」與「單位個數增加」兩者差異，無法清楚判斷應該使用加法還是乘法，導致列式錯誤。
	4.例：「 $3x^2$ 表示 $3x \cdot 3x$ 」。S1 未將數字、代數符號都做相乘的步驟。
	5.乘法代數式簡記： (1) 因未確實理解運算符號性質，「把負號當作是減號」，缺乏正確的「負號」概念，用「減號」思維簡記此類型題目，導致「代數符號－乘法簡記」錯誤。 (2) 未依題意進行運算、化簡，卻用「加法」進行代數符號與數字運算。 (3) 不清楚「分數型式的代數符號簡記」之解題技巧，但分數約分的先備知識是具備的。
	6.除法代數式簡記： 分數除法運算概念錯誤，不清楚前項「x」應擺在分子還是分母，導致「代數符號－分數型除法簡記」錯誤。
	7.未能正確地將代數符號、數字做分別處理，導致代數式合併與化簡錯誤。

表 3 S2（男）研究參與者背景分析與概念錯誤類型

背景分析	概念錯誤類型
1.個性與平時表現：個性活潑，平時與同學有良好互動。	1.認為式子化簡結果為「單項式」的型式。
2.學習意願：學習意願佳，若有老師耐心指導、重複講解，進步顯著。	2.未能正確判斷「倍數」與「單位個數增加」兩者差異，無法清楚判斷應該使用加法還是乘法，導致列式錯誤。
3.平時的成績表現：文科成績不錯，但數理方面偏弱。	3.閱讀能力低落，掌握不到題意，造成沒辦法做進一步邏輯推理，進而使用不當的運算解題策略。
	4.例：「 $3x^2$ 表示 $3x \cdot 3x$ 」。未將數字、代數符號都做相乘的步驟。
	5.乘法代數式簡記：
	（1）未確實理解運算符號性質，「把負號當作是減號」，缺乏正確的「負號」概念，用「減號」思維簡記此類型題目，導致「代數符號－乘法簡記」錯誤。
	（2）未依題意運算及化簡，卻用「加法」進行代數符號與數字運算。
	（3）不清楚「分數型式的代數符號簡記」之解題技巧，但分數約分的先備知識是具備的。
	6.分數除法運算概念錯誤，不清楚前項應擺在答案的分子還是分母，導致「代數符號－分數型除法簡記」錯誤。
	7.未能正確將代數符號、數字項分別合併，卻將前兩項與後兩項的係數合併及運算，導致代數式合併與化簡錯誤。
	8.因粗心造成的隨機型錯誤。

表 4 S (女) 3 研究參與者背景分析與概念錯誤類型

背景分析	概念錯誤類型
1.個性與平時表現：個性不積極，經常在睡覺。	1.長方形周長的計算公式概念錯誤導致答題錯誤。
2.學習意願：平時上課愛睡覺，學習意願低落，但理解力與反應速度良好，若老師嚴格要求 S3 會認真上課。	2.閱讀能力低落，掌握不到題意，造成沒辦法做進一步邏輯推理，進而使用不當的運算解題策略。
3.平時的成績表現：學習速度較同儕慢，成績表現落在班上後段。	3.未能正確判斷「倍數」與「單位個數增加」兩者差異，無法清楚判斷應該使用加法還是乘法，導致列式錯誤。
	4.運算符號、代數符號性質概念錯誤，導致代數式簡記錯誤。例：將 $3x$ 誤解成「等於 $3+x$ 」。
	5.乘法代數式簡記：
	(1) 以「減號」思維處理含有「負號」的「代數符號—乘法簡記」題目，導致簡記錯誤。
	(2) 未依題意進行運算、化簡，卻用「加法」進行代數符號與數字運算。
	(3) 不清楚「分數型式的代數符號簡記」的解題技巧，但分數約分的先備知識是具備的。
	6.未正確地將代數符號、數字做分別合併，而將每項係數相加減後的結果，再加上 x ，導致代數式合併與化簡錯誤。

表 5 S4（女）研究參與者背景分析與概念錯誤類型

背景分析	概念錯誤類型
1.個性與平時表現：個性活潑開朗，和老師的互動良好。 2.學習意願：學習態度佳，若有老師耐心指導、重複講解，進步顯著。 3.平時的成績表現：數理方面特別弱，平時課業成績位在班上後段。	1.長方形周長的計算公式概念錯誤導致答題錯誤。 2.閱讀能力低落，掌握不到題意，造成沒辦法做進一步邏輯推理，進而使用不當的運算解題策略。 3.未能正確判斷「倍數」與「單位個數增加」兩者差異，無法清楚判斷應該使用加法還是乘法，導致列式錯誤。 4.運算符號、代數符號性質概念錯誤，導致代數式簡記錯誤。例：將 $3x$ 誤解成「等於 $3+x$」。 5.「有關代數符號的錯誤類型」理論中的「認為式子化簡結果為『單項式』型式」。 6.隨機型錯誤（粗心而答案遺漏負號）。 7.未正確地將代數符號、數字做分別合併，而將每項係數相加減後的結果，再乘上 x，導致代數式合併與化簡錯誤。

表 6 S5（女）研究參與者背景分析與概念錯誤類型

背景分析	概念錯誤類型
1.個性與平時表現：個性文靜，配合度佳，但缺乏自信，不擅表達個人想法、怯於發問，擔心答錯或發問會被老師罵。	1.對長方形周長的計算公式概念錯誤而導致答題錯誤。
2.學習意願：S5 為數學小老師，對她而言是一項肯定與榮譽，有效提升學習意願與自信心。	2.未能正確判斷「倍數」與「單位個數增加」兩者差異，無法清楚判斷應該使用加法還是乘法，導致列式錯誤。
3.平時的成績表現：數理科成績不理想，平時課業成績位在班上後段。	3.閱讀能力低落，掌握不到題意，造成沒辦法做進一步邏輯推理，進而使用不當的運算解題策略。
	4.認為式子化簡結果為「單項式」的型式。
	5.因未確實理解代數符號性質，導致在「代數式的簡記」出現錯誤。例如：將 x^2 誤解成「等於 $x+x$ 」。
	6.以「減號」思維處理含有「負號」的「代數符號—乘法簡記」題目，導致簡記錯誤。
	7.分數除法運算概念錯誤，不清楚前項應擺在答案的分子還是分母，導致「代數符號—分數型除法簡記」錯誤。
	8.未正確地將代數符號、數字做分別合併，而將每項係數相加減後的結果，再乘上 x ，導致代數式合併與化簡錯誤。

二、研究場域

上課地點為高雄市一所國中四樓學習中心教室。該校位於市中心，交通便利，班上其中兩位學生為跨學區就讀、兩位學生來自新住民家庭。多數學生家庭經濟條件不佳（中低收入戶），在國小階段未曾參與補救教學課程與課後補習，來參加本次補救教學課程是父母強迫他們來上課的。

第三節 研究方法

一、量化部分

本研究將蒐集「一元一次方程式－以符號列式與運算」前測試卷、「一元一次方程式－以符號列式與運算」後測試卷兩種測驗分數，利用 SPSS12.0 中的描述性統計、相依樣本 t 檢定之方式進行統計分析，說明如下：

(一) 答錯率及平均答錯率

本研究利用「答錯率」公式，計算全部受試學生於前、後測試卷每道試題的答錯率；接著再利用「平均答錯率」公式，計算出全部受試學生於每項錯誤類型的平均答錯率，以初略分析研究對象前、後答題情形，計算公式如下：

$$\text{答錯率} = \frac{\text{答錯人數}}{\text{總人數}} \times 100\% ; \text{平均答錯率} = \frac{\text{單一錯誤類型答錯率}}{\text{單一錯誤類型總題數}} \times 100\%$$

(二) 描述性統計

本研究以上述兩種成績進行描述性統計，得出平均數 (M)、變異數 (S^2)、標準差 (SD)，比較教學實驗之前、後學生的學習成效差異情形。

(三) 相依樣本 t 檢定

比較學生進行教學實驗前、後的學習成效之差異情況，故依照相依樣本 t 檢定信賴區間於 95%，顯著水準為 .05 之統計資料分析，計算公式如下：

$$t = \frac{\bar{x}_d}{\frac{s_d}{\sqrt{N}}}$$

$\bar{x}_d$ ：前、後測差異的平均數

s_d ：前、後測差異的樣本標準差

N ：觀察值個數

二、質化部分

（一）訪談法—半結構性訪談

本研究於教學實驗完畢後，研究者從研究對象已完成的前、後測試卷、學習單和評量卷，針對答錯題目學生所寫的解題歷程，歸納答錯的錯誤類型，並詢問學生原本解題時的想法，深入瞭解答錯原因與解題時面臨到的困難點。訪談過程以紙筆及電腦打字記載訪談內容，並針對其內容做進一步分析。

（二）文件分析法

蒐集學生完成的「一元一次方程式—以符號列式與運算」學習單、評量卷試題，研究者於教學當日會填寫學生答題情況紀錄表（附錄 20），詳細記錄下學生的答錯題目、錯誤類型及原始的解題歷程；學生作答的「一元一次方程式—以符號列式與運算」前、後測試卷也是文件分析的內容之一。



第四節 研究設計

本研究為探討個案國中七年級學生接受「一元一次方程式－以符號列式與運算」三項錯誤類型補救教學之成效。由於本教學實驗僅有一班實驗組，沒有對照組，因此採「單組前後測實驗設計」。此外，本研究進行教學實驗前，先對研究對象進行「一元一次方程式－以符號列式與運算」前測評量，作為前測數據，完成教學實驗後，再對研究對象進行後測，其教學實驗設計（如表 7）。

表 7 教學實驗設計

組別	前測	處理	後測
實驗組	O ₁	X	O ₂

O₁：代表數學學習成效之前測

X：代表進行補救教學之教學實驗

O₂：代表數學學習成效之後測

學生「國民小學及國民中學補救教學科技化評量」數學科測驗成績未通過。本研究以「一元一次方程式－以符號列式與運算」為教學實驗單元，期盼在有效的補救教學中建立正確概念，提升答題正確率，教學實驗課程規劃簡表（如表8）包含：「課程主題」、「教學目標」、「教學活動時間」。此外，上課講義之參考資料包含：翰林版國一上教師手冊（依據107年公布之十二年國教課綱數學領域編輯而成）、均一教育平台線上題庫、教育部國中數學基本學習內容補救教材－第一冊，本研究教學實驗之教案請參閱附錄1、附錄2、附錄3、附錄4。

教學流程部分，研究者首先透過情境對話導入單元概念，接著帶入範例講解，使學生能加快理解；最後，請學生們完成隨堂練習，以實際演練熟悉各種題型。

表 8 教學實驗課程規劃簡表

課程主題	教學目標	教學活動時間
一、代數符號意義之理解及代數式列式	1.能理解代數符號之性質，並熟練運用運算符號與代數符號記錄生活中的數學問題，以代數式呈現。	50 分鐘
二、代數式的簡記	1.精熟乘法之代數式的簡記。	50 分鐘
	2.精熟除法之代數式的簡記。	50 分鐘
三、代數式的合併與化簡	1.精熟代數式的合併與化簡。	50 分鐘

（註：每節課為 50 分鐘，共 4 節課，共計 200 分鐘）

第五節 研究工具

課程教到一個完整段落後，以多元評量做學習成效檢核。本研究的研究工具：「一元一次方程式－以符號列式與運算」前、後測試卷、「一元一次方程式－以符號列式與運算」學習單、「一元一次方程式－以符號列式與運算」評量卷（共三回）、訪談紀錄表、學生答題情況紀錄表、教學日誌等七項，詳細說明如下（如表 9）：

表 9 研究工具總表

研究工具	功能	頁碼
「一元一次方程式－以符號列式與運算」前測試卷	作為學習成效之前測成績	附錄 11
「一元一次方程式－以符號列式與運算」後測試卷	作為學習成效之後測成績	附錄 12
「一元一次方程式－以符號列式與運算」學習單	1.檢核學習成效。 2.熟練習題。	附錄 13
「一元一次方程式－以符號列式與運算」評量卷（共三回）	1.檢核學習成效。	附錄 14
	2.熟練習題。	附錄 15
		附錄 16
訪談紀錄表	針對學生前、後測試卷答錯的考題，透過訪談深入瞭解其原始解題想法／困難點，同時一併瞭解哪個環節因教學後而改善，使得學會解題。	附錄 19
學生答題情況紀錄表	詳實記錄以下內容：	
	1.作答日期。	
	2.學生（用代號表示）。	
	3.答錯試題的題目。	附錄 20
	4.錯誤類型。	
	5.原始解題歷程。	
教學日誌	6. 困難點／錯誤理由。	
	詳實記錄以下內容：	
	1.上課日期、時間。	
	2.教學進度。	附錄 21
	3.課堂記錄：學生課堂反應與學習情形。	
	4.教學省思等內容。	

一、「一元一次方程式－以符號列式與運算」之前、後測試卷

本研究的「一元一次方程式－以符號列式與運算」之前、後測試卷(如附錄 11、附錄 12) 考題各 15 題，每題 7 分，滿分 105 分，為確保前測評量試題有良好的信、效度，除了和指導教授研討、修正外，亦邀請三位資深數學專家、教師(如表 10)協助審核，查看哪些題目需修改或刪除。將專家效度名單(由上而下)依序編碼為 T1、T2、T3，審題修改對照表(如表 11)；前、後測成績結果作為學習成效的前、後測數據(如表 13)，分數由高至低排序；教學實驗後，研究者對研究對象進行『一元一次方程式－以符號列式與運算後測評量試卷』施測，比較與分析前、後測成績，探討研究對象接受「一元一次方程式－三項錯誤類型」補救教學成效。

1. 考題範圍：為本次補救教學上課所教的『一元一次方程式－以符號列式與運算』，包含：

(1) 檢核是否能正確「運用運算符號與代數符號記錄數學問題」，例如：「邊長為 y 公分的正五邊形，其周長為_____公分」等題型。

(2) 檢核是否完全修正「代數符號簡記錯誤」之錯誤概念，例如：「 $4y$ 其代表性質為何？(A) $4+y$ ，(B) $4 \cdot y$ 」等類似題型。

(3) 檢核是否完全修正「代數符號同類項合併、記錄錯誤」之錯誤類型，例如：「請化簡下列算式： $2y+4+5+6y$ 」等類似題型。

2. 試題出題之參考資料：參考翰林版之國一年數學教師手冊、均一教育平台題庫、教育部國中數學基本學習內容補救教材－第一冊等資料，並加以修訂編制成試卷初稿。

3. 每份試卷共 15 題，包含 14 題計算題、1 題選擇題，每題 7 分，滿分為 105 分；測驗時間為 40 分鐘。

4. 為確保後測評量試卷之試題有良好的信、效度，本測驗試題不僅和指導教授研討、修正外，亦邀請三位資深數學專家、教師(如表 10)協助審核後測試題，查看哪些題目需要修改或刪除；專家效度名單(由上而下)依序編碼為 T1、T2、T3，審題修改對照表(如表 12)。

表 10 前、後測試卷－專家效度名單

代號	姓名	服務學校	職稱
T1	鄭○昌	國立臺東大學教育學系	副教授
T2	鄭○文	臺東市立豐榮國小	教師
T3	吳○友	高雄市立小港高級中學	教師

表 11 前測試卷－專家審題修改對照表

錯誤類型	修正前題號、題目	修正後題目	修訂意見
未能正確運用運算符號與代數符號記錄成代數式	例題一、 一個寬為 2 公分，長為 x 公分的長方形周長為____公分。(請將文字敘述寫成數學算式)	題目文字敘述未修改，有新增長方形圖示。	T2：建議題目附上長方形圖案。
	例題三、 已知媽媽比女兒大 30 歲，假設用 x 歲表示媽媽的年齡，那麼女兒的年齡可表示____歲。(請將文字敘述寫成數學算式)	奇奇玩投籃機總共花了 x 元，假設玩一次 30 元，請問奇奇總共玩了____次。(請將文字敘述寫成數學算式)	T3：建議與後測例題四互換，以利前、後測類題皆有。
代數符號簡記錯誤	例題六、 請化簡下列式子： $4x(-2x) = ?$	請化簡下列式子： $4 \cdot (-2x) = ?$	T1：可新增類題如：「 $(-2) \cdot 3x$ 」或「 $(-1) \cdot (-4x)$ 」等題型。 T3：改成「 $4 \cdot (-2x)$ 」格式一致，以減輕學生認知負擔。
	例題七、 請化簡下列式子： $12x \times \frac{3}{4} = ?$	請化簡下列式子： $12x \cdot \frac{3}{4} = ?$	T3：題目改成「 $12x \cdot \frac{3}{4}$ 」格式一致，以減輕學生認知負擔。
未能正確地將代數符號同類項合併並記錄下來	例題八、 請化簡下列式子： $3x + 4y + 5x + 6y = ?$	因本題為二元一次式題型，超出教學範圍，故刪除。	T3：題目同時出現兩個代數符號，變成二元一次式的題型，超出教學範圍，故建議刪除。

從表11得知，專家主要提出四項修訂重點：1. 建議例題一附上長方形圖示；2. 乘號表示應格式一致，減輕學生認知負擔；3. 前、後測的「運用運算符號與代數符號記錄成代數式」題型應相呼應；4. 應刪除二元一次式題型。

表 12 後測試卷－專家審題修改對照表

錯誤類型	修正前題號、題目	修正後題目	修訂意見
未能正確運用運算符號與代數符號記錄成代數式	例題二、 假設一台電視遊樂器 x 元，小銘和小陶共買一台，則每人應分攤_____元。 (請將文字敘述寫成數學算式)	假設小銘、小陶、安安、恩華四個人一起去吃晚餐，共花了 x 元，則每人應分攤_____元。(請將文字敘述寫成數學算式)	T1：建議改成一起吃午飯，共同分攤餐費一類較生活化問題。
	例題四、 奇奇玩投籃機總共花了 x 元，假設玩一次 30 元，請問奇奇總共玩了_____次。 (請將文字敘述寫成數學算式)	已知媽媽比女兒大 30 歲，假設用 x 歲表示媽媽的年齡，那麼女兒的年齡可表示_____歲。(請將文字敘述寫成數學算式)	T3：建議與前測例題三互換，以利前、後測類題皆有。
代數符號簡記錯誤	例題六、 請化簡下列式子： $5x(-3x) = ?$	請化簡下列式子： $5 \cdot (-3x) = ?$	T3：改成「 $5 \cdot (-3x)$ 」格式一致，以減輕學生認知負擔。
	例題七、 請化簡下列式子： $18x \times \frac{5}{6} = ?$	請化簡下列式子： $18x \cdot \frac{5}{6} = ?$	T3：改成「 $18x \cdot \frac{5}{6}$ 」格式一致，以減輕學生認知負擔。
未能正確地將代數符號同類項合併並記錄下來	例題八、 請化簡下列式子： $9x + 8 - 4y + 6x + 13y = ?$	題目刪除。	T3：題目同時出現兩個代數符號，變成二元一次式的題型，超出教學範圍，故建議刪除。
	例題九、 請化簡下列式子： $(6x + 10) + (2x - 8) = ?$	題目文字敘述未修改，僅做題號調整。	T3：題目位置調整至例題八。

錯誤類型	修正前題號、題目	修正後題目	修訂意見
未能正確地將代數符號同類項合併並記錄下來	例題十、 請化簡下列式子： $(3x-6) + (-5x+12)$ $= ?$	題目文字敘述未修改，僅題號調整。	T3：題目位置調整至例題九。

從表 12 得知，專家主要提出四項修訂重點：1. 建議例題二改成「一起吃午飯，共同分攤餐費」一類較生活化問題；2. 乘號表示應格式一致，減輕學生認知負擔；3. 刪除二元一次式的題型；4. 題目應由簡易到難度高排序。

表 13 研究對象及「一元一次方程式－以符號列式與運算」前、後測成績

研究對象	前測成績	後測成績
S1	7	105
S2	0	91
S3	21	91
S4	42	77
S5	21	105

二、「一元一次方程式－以符號列式與運算」學習單

「一元一次方程式－以符號列式與運算」學習單（如附錄 13），此為進行教學實驗過程中，每教完一個單元段落後的隨堂練習題目，即進行試題演練，檢視學生吸收程度，以及過往出現的錯誤是否已完全被修正，再決定是否進行教學進度與教學方式的調整。

為確保學習單之試題有良好的信、效度，本測驗試題不僅和指導教授研討、修正之外，亦邀請三位資深的數學專家、教師（如表 10）協助審核學習單試題，查看哪些題目需要修改或刪除；專家效度名單（由上而下）依序編碼為 T1、T2、T3，審題修改對照表（如表 14）。

表 14 學習單－專家審題修改對照表

錯誤類型	修正前題號、題目	修正後題目	修訂意見
未能正確運用運算符號與代數符號記錄成代數式	第五題： 桌上有 y 顆橘子，平分給 6 個人，則每個人能夠拿到幾顆橘	新增第六題： 爸爸到美式商場買了 5 箱蘋果，假設一箱蘋果有 y	T1：如果有除法題型，則建議練習題新增乘法題型。

錯誤類型	修正前題號、題目	修正後題目	修訂意見
	子？請依據題意列出代數式（答案用 y 表示）	顆，請問爸爸共買了幾顆蘋果？請依據題意列出代數式（答案用 y 表示）	
代數符號簡記錯誤	第三題： $3xx$ 可記為_____， 或簡記為_____。	$x \cdot 3$ 可記為_____， 或簡記為_____。	T2、T3：題目修正為 $x \cdot 3$ ，以呼應第一題。
未能正確地將代數符號同類項合併與化簡	（一）第四題： $15x - 7x =$ _____ = _____	$15y - 7y =$ _____ = _____	T3：讓學生瞭解變數不只 x 。
	（一）第五題： $4x - 8x =$ _____ = _____	$4z - 8z =$ _____ = _____	T3：讓學生瞭解變數不只 x 。
	（二）第五題： $-(x-5) =$ _____	題目刪除。	T1：此種題型在前、後測中並未出現。

從表 14 得知，專家主要提出三大修訂重點：1. 「運用運算符號與代數符號記錄成代數式」部分可有乘、除法題型；2. 題目的代數符號不要只單一使用 x ，可變換其他代數符號；3. 學習單的題目題型應與前、後測試題題型相互一致。

三、「一元一次方程式—以符號列式與運算」評量卷

「一元一次方程式—以符號列式與運算」評量卷共有三回（如附錄 14、15、16），其目的是要檢核是否達到精熟學習。

為確保各回評量卷試題有良好的信、效度，本測驗試題不僅和指導教授研討、修正之外，也邀請三位資深的數學專家、教師（如表 10）協助審核各回評量卷試題，查看哪些題目需要修改或刪除；專家效度名單（由上而下）依序編碼為 T1、T2、T3，審題修改對照表（如表 15、表 16、表 17）。

表 15 評量卷 1—專家審題修改對照表

錯誤類型	修正前題號、題目	修正後題目	修訂意見
未能正確運用 運算符號與代 數符號記錄成 代數式	第四題： 底邊為 x 公分，高為 y 公分，則三角形面積 為_____平方公分。	三角形的底邊為 y 公分，高比底邊多 3 公分，則高為____ 公分。	T1、T3：題目同時 出現兩個代數符 號，變成二元一次 式的題型，超出教 學範圍，故建議修 改之。

表 16 評量卷 2—專家審題修改對照表

錯誤類型	修正前題目	修正後題目	修訂意見
代數符號乘法簡 記錯誤	第五題： $0.3 \times t$ 可記為____， 或簡記為____。	題目刪除。	T1：小數表徵在 前、後測未出現。
	第八題： $\frac{1}{2} \times a \times b$ 可記為____， 或簡記為____。	$\frac{1}{2} \times a$ 可記為____或 簡記為____。	T1、T3：題目同時 出現兩個代數符 號(二元一次式)， 超出教學範圍，故 建議修改之。
代數符號除法簡 記錯誤	第五題： $x \div \frac{4}{5} = ?$	題目刪除。	
	第六題： $x \div (-\frac{5}{6}) = ?$	題目刪除。	
	第七題： $x \div 4 + 1 = ?$	題目刪除。	T1、T3：分數型除 法簡記題型於學 習單及前、後側未 出現。
	第八題： $(-5) + x \div 7 = ?$	題目刪除。	
	第九題： $(-2) + x \div 3 = ?$	題目刪除。	
	第十題： $\frac{1}{4} + x \div 2 = ?$	題目刪除。	T3：學習單無此種 題型。

表 17 評量卷 3—專家審題修改對照表

錯誤類型	修正前題目	修正後題目	修訂意見
未能正確地將代數符號同類項合併並記錄下來	第一題： 請化簡下列算式， 並詳列計算過程： $4x+9+10x=?$	請化簡下列算式，並詳 列計算過程： $4x+10x=?$	T3：建議題目修改 為 $4x+10x=?$
	第七題： 請化簡下列算式， 並詳列計算過程： $(6x-5)+(3-7x)=?$	請化簡下列算式，並詳 列計算過程： $(6x+5)+(3+7x)=?$	T1：前、後測題型 應和練習有一致 性。
	第八題： 請化簡下列算式， 並詳列計算過程： $(8x-3)+(-12x+4)=?$	請化簡下列算式，並詳 列計算過程： $(8x-3)+(-12x+4)=?$	T1：前、後測題型 應和練習有一致 性。
	第九題： 請化簡下列算式， 並詳列計算過程： $(-3d+8)+(6d-20)=?$	請化簡下列算式，並詳 列計算過程： $(-3d+8)+(6d-20)=?$	T1：前、後測題型 應和練習有一致 性。
	第十題： 請化簡下列算式， 並詳列計算過程： $(-5d+3)+(10d-2)=?$	請化簡下列算式，並詳 列計算過程： $(-5d+3)+(10d-2)=?$	T1：前、後測題型 應和練習有一致 性。 T2：本題與第八題 類似，可改成 $-(4-5d)=?$

從表 15、16、17 得知，專家主要提出三大修訂重點：1. 建議刪除二元一次式題型；2. 評量卷的題型應和前、後測題型有一致性；3. 刪除二元一次式的題型。

四、學生訪談

研究者從研究對象的前、後測試卷、學習單和評量卷，針對答錯題目的解題歷程歸納錯誤類型，並詢問學生原本解題時的想法，深入瞭解答錯原因與解題困難點。訪談過程用紙筆及電腦打字記載訪談內容，並做進一步整理與分析。

五、學生答題情況紀錄表

學生答題情況紀錄表（附錄 20）詳實記錄每位學生在「一元一次方程式－以符號列式與運算」學習單、評量卷（共三回）答錯試題題目、錯誤類型、原始的解題歷程以及原始解題想法／困難點或錯誤理由。

六、教學日誌

教學日誌（附錄 21）為研究者於當日教學完畢後撰寫，詳實記錄上課日期、教學進度、課堂記錄（記錄學生的課堂反應與學習情形）、教學省思等內容。



第六節 資料處理與分析

一、量化資料

本研究的量化數據分別來自「一元一次方程式－以符號列式與運算」前、後測成績，之後計算答錯率及平均答錯率公式與利用 SPSS12.0 中的描述性統計、相依樣本 t 檢定之方式進行統計分析，其詳細說明如下：

（一）答錯率及平均答錯率

本研究利用「答錯率」及「平均答錯率」公式，計算全部受試學生於前、後測試卷每道試題的「答錯率」及「平均答錯率」，以初略分析研究對象前、後測答題情形。

（二）描述性統計

本研究以補救數學的前、後測成績進行描述性統計，得出平均數（ M ）、變異數（ S^2 ）、標準差（ SD ），來比較、分析學生接受「一元一次方程式－以符號列式與運算三項錯誤類型」的補救成效。

（三）相依樣本 t 檢定

比較學生進行教學實驗前後的成效差異，故依照相依樣本 t 檢定，信賴區間於 95%，顯著水準為 .05 之統計資料分析。

二、質性資料

（一）「一元一次方程式－以符號列式與運算」前、後測試卷

研究者從「一元一次方程式－以符號列式與運算」前測試卷其答錯試題的解題歷程，判斷錯誤類型狀態；然後從「一元一次方程式－以符號列式與運算」後測試卷其答錯試題的解題歷程，分析與判斷哪些錯誤已完全被修正，還有哪些部分仍未建立正確觀念，需做二次補救教學。

(二) 「一元一次方程式－以符號列式與運算」學習單

「一元一次方程式－以符號列式與運算」學習單為隨堂練習習題，讓學生學習後即時演練的方式，可清楚判斷學生聽課過程中是否有融會貫通，並從其計算過程做即時的錯誤修正。

(三) 「一元一次方程式－以符號列式與運算」評量卷

「一元一次方程式－以符號列式與運算」評量卷為小考試題，讓學生學習完當日的課程主題後，進行評量檢核，可清楚瞭解每位學生當日的學習狀況，評量後研究者會立即檢討試題，從他們的計算過程做即時的錯誤修正。

(四) 學生答題情況紀錄表

「學生答題情況紀錄表」記錄每位學生在學習單、評量卷答錯試題及錯誤類型，還有原始解題歷程，並詢問學生他們原始解題想法／困難點，從其瞭解錯誤理由。

(五) 訪談紀錄

從受訪者 S1 與 S4「一元一次方程式－以符號列式與運算」前、後測試卷答錯試題（僅挑選部分題目），分別訪談他們原始解題想法／困難點，從其瞭解錯誤理由；同時一併瞭解「哪個環節因教學後而改善，使得學會解題」。

第七節 教育研究倫理

做研究需把遵守研究倫理這件事情擺放在前位，研究倫理規範為培養研究者對個人研究行為、研究結果有正向態度、負責任表現，所以研究者應知道哪些作為是合乎研究倫理規範，哪些行為會踩到法律紅線；研究倫理規範涵蓋範圍很廣泛，包含：專業規範、政府規定、個人責任等（張作為，2007），假使研究有豐碩產出，卻違反學術研究倫理，將失去研究意義與價值，因此研究者應遵守以下規範進行研究：

一、盡告知同意責任

蒐集資料過程中，必須事先讓受訪者瞭解研究目的與程序，並向受訪者說明雙方應盡的義務和責任，徵得受訪者同意擔任受訪者，且願意確實配合遵守承諾後，才能開始進行研究；假如受訪者為未成年人，則須事先獲得家長、監護人、教師許可，才能進行更進一步的訪談（葉重新，2017）。如果事先取得受訪者的告知後同意（informed consent），提出問題是可以被接受的；否則在參與者沒有瞭解、未表達意願和未被告知的情況下就進行蒐集資料，該行為將會被認定是不道德的（Ranjit, K.、謝雨生、黃國光，2016）。

二、研究過程應確保受訪者身心安全

葉重新（2017）提到，研究過程須確保受訪者的身心安全，應尊重他人的個人意願，並允許受訪者得隨時退出研究。研究者如果為了取得真實研究資料，必須採取隱瞞、欺騙或偽裝時，在研究結束後，應盡速向受訪者說明採取這些措施的原因。

三、維護受訪者隱私權及盡個人資料保護之義務

為顧及受訪者的個人隱私權及個人資料保護權益，研究資料蒐集與訪談結束後，除了要確保受訪者所提供的資料必須以隱匿方式處理，而且個別受訪者及其提供的資料是無法被辨識出身分的。

四、教育研究倫理與專業規範

葉重新（2017）針對關於教育研究倫理與專業規範整理了以下幾項重點：

1. 不可竄改、或剽取他人的作品及文獻資料；
2. 研究題材與內容不可違背教育的意義；

3. 研究設計適當，深入探討文獻，研究過程嚴謹，資料處理分析正確、客觀；
4. 使用他人的研究工具之前，應取得對方的同意；
5. 研究的工具應確實檢驗其信度及效度，不可作假；
6. 若研究發現和研究假設不相符，須誠實呈現研究結果，不可任意竄改數據；
7. 研究結束之後，應告知受試者有關的內容，以澄清其誤解。

本研究之研究對象皆為未成年人，因此在進行研究前將先發放訪談知情同意書（附錄 17）徵得學生家長同意，讓孩子共同參與教學實驗，並於補救後接受個別訪談。本研究之訪談資料僅做研究之用，研究參與者個人基本資料與訪談內容絕對會遵守保密原則，不對外公開，且研究參與者姓名皆以編碼呈現，避免任何可辨識個人之資訊。此外，研究過程中，如研究參與者因故中途退出研究，研究者將予以尊重。最後，研究者在資料分析時也會以客觀中立的角度分析數據，撰寫報告時亦不過度推論結果，呈現完整、客觀的研究成果。



第四章 研究發現與討論

本研究透過前測筆試，分析、瞭解研究對象於「一元一次方程式－以符號列式與運算」常見的三項錯誤類型之狀態，並根據其錯誤類型設計教學活動、教材，進行補救教學實驗；教學實驗結束後，接續對研究對象進行後測筆試，探討學生接受「一元一次方程式－以符號列式與運算」補救是否具成效；最後對整個教學實驗歷程進行省思，並供其他教學者教授相關課程時參考。

本章共分為二節，第一節為分析學生於三項錯誤類型之狀態，第二節為三項錯誤類型補救教學對學生的學習成效影響。

第一節 分析學生於三項錯誤類型之狀態

本研究前測試題共 15 題，分別依據三項錯誤類型來設計，題目分布說明如下：（一）未能正確運用運算符號與代數符號記錄成代數式；共 4 題。（二）代數符號簡記錯誤；共 8 題。（三）未能正確地將代數符號、數字做分別處理，導致代數式的合併與化簡出現錯誤；共 3 題。

本節依據前測結果，針對答錯率、平均答錯率進行初略分析，瞭解答題情形（表 18）；並按照各題目所代表的錯誤類型，論述分析研究對象於「一元一次方程式－以符號列式與運算」三項錯誤類型之狀態（表 19 至表 33）。

一、「一元一次方程式－以符號列式與運算」前測答題情形

研究者利用「答錯率」、「平均答錯率」公式，初略分析研究對象前測答題情形（如表 18），計算公式如下：

$$\text{答錯率} = \frac{\text{答錯人數}}{\text{總人數}} \times 100\% ; \text{平均答錯率} = \frac{\text{單一錯誤類型答錯率}}{\text{單一錯誤類型總題數}} \times 100\%$$

例：運用運算符號與代數符號記錄成代數式的平均答錯率

$$= \frac{100 + 80 + 80 + 80}{4} \% = 85\%$$

表 18 「一元一次方程式—以符號列式與運算」前測答題情形分析 (N=5)

錯誤類型	題號	答錯人數	答錯率%	平均答錯率%
一、未能正確運用運算符號與代數符號記錄成代數式	例題 1	5	100	85
	例題 2	4	80	
	例題 3	4	80	
	例題 4	4	80	
二、代數符號簡記錯誤	例題 5	5	100	75
	例題 6	4	80	
	例題 7	5	100	
	例題 8	4	80	
	例題 9	3	60	
	例題 10	3	60	
	例題 11	3	60	
	例題 12	3	60	
三、未能正確地將代數符號、數字做分別處理，導致代數式的合併與化簡出現錯誤	例題 13	5	100	100
	例題 14	5	100	
	例題 15	5	100	

從表 18 發現，例題 1、例題 5、例題 7、例題 13、例題 14、例題 15 的答錯率高達 100%，也就是說，全部受試者都答錯以上題目；例題 2、例題 3、例題 4、例題 6、例題 8 的答錯率也高達 80%，也就是說，五位受試者當中就有四位受試者答錯以上題目；例題 9 至例題 12 的答錯率為 60%，是全部題目中答錯率最低的幾題題目，但嚴格來說，60%的答錯率仍算高，因為五位受試者當中就有三位受試者答錯以上題目，答錯人數過半，代表有一半以上的學生對於例題 9 至例題 12 各題題目存在錯誤概念，需重新建立正確概念。

此外，若從「平均答錯率」來分析，發現受試者於第三項錯誤類型「未能正確地將代數符號、數字做分別處理，導致代數式的合併與化簡出現錯誤」的平均答錯率高達 100%，同一錯誤類型的試題都沒人答對，代表全部受試者在「代數式的合併與化簡」部分存在錯誤概念，便未能掌握住此種題型的作答；而錯誤類型一的平均答錯率 85%為次之，其數據代表在錯誤類型一的題目中，各題至少都有 4 人答錯；錯誤類型二「代數符號簡記錯誤」的平均答錯率為 75%，雖然是三種錯誤類型中平均答錯率最低的錯誤類型，但此種錯誤類型的各試題其答錯人數皆過半，整體答對率表現仍不理想。

綜合上述，受試者在「錯誤類型三」的試題答錯率最高，「錯誤類型一」的試題答錯率次之，「錯誤類型二」的試題答錯率最低。

二、「一元一次方程式—以符號列式與運算」三項錯誤類型之狀態分析

研究者依據學生答錯題目，詢問原始解題歷程的想法、困難點，分析錯誤類型狀態。

（一）錯誤類型一：未能正確運用運算符號與代數符號記錄成代數式

1. 以為長方形周長公式為「長·寬」，違背題目要求做運算，導致未能正確運用運算符號與代數符號記錄成代數式。

2. 學生看到計算結果為「 $a \pm bx$ 」或「 $ax \pm b$ 」型式時，就認為「答案還沒完全化簡，直到合併成一項『 c 』或『 dx 』型式，才是真正的化簡完畢」。

3. 「兩物體間數量呈倍數關係」與「物體單位個數增加」未確實理解兩者差異，所以搞不清楚何時要用「+」或是用「·」列式及計算。

此種錯誤類型題目共四題，測驗目的為確認學生是否已能正確運用運算符號與代數符號記錄生活情境中的代數式；請參閱表 19 錯誤類型一（例題 1）至表 22 錯誤類型一（例題 4）之解題狀態分析。

例題 1 錯誤類型一的解題狀態如表 19：

表 19 錯誤類型一（例題 1）之解題狀態分析

答錯考題	錯誤類型狀態	原始解題歷程	解題想法／解題困難點
例題 1：如下圖所示，一個長為 2 公分，寬為 x 公分的長方形周長為 _____ 公分。 （請將文字敘述寫成數學算式）	S1、S3、S4、S5： 長方形周長的計算公式概念錯誤導致答題錯誤。 S2： 1. 屬於錯誤類型理論中 Engelhardt (1982) 提出的「概念化錯誤」，以及李芳樂 (1993) 及 Maurer (1987) 提出的「系統性錯誤」。 2. 屬於「有關代數符號的錯誤類型」理論中的「認為式子化簡結果為『單項式』型式」。	S1、S3、S4、S5： $2 \cdot x = 2x$ S2： $(2+x) \cdot 2 = 4 + 2x = 4x$	S1、S3、S4、S5：以為長方形周長計算公式為「長·寬」。 S2：因為通常式子經過運算後，最後一定會變成一項，加減符號之類的不會留著，所以我就繼續合併，但是我不知道『 $4 + 2x$ 』要怎麼繼續化簡成一項，所以我就取『左邊的 4 和右邊的 x 』合併成一個答案。

從表 19 可發現，本題原測驗目的是測驗學生是否能夠將題目的文字敘述寫成代數式，然而從測驗結果發現，S1、S3、S4、S5 四位學生的錯誤共同點就是「長方形周長公式」概念錯誤，他們所認知的長方形周長計算公式為「長・寬」，進而導致代數式列式錯誤，所以研究者認為本題題目尚有修正空間，題目應附上長方形周長計算公式將更完善，可避免錯用公式的情況發生，如此研究者才能命中「運用運算符號與代數符號記錄成代數式」之測驗核心；此外，「長方形周長公式概念不正確導致答題錯誤」的錯誤類型狀態屬於文獻探討錯誤類型理論中秦麗花（1995）提及的「基本概念與公式不清」。

另外，只有 S2 一位學生有正確的「長方形周長計算」概念，知道公式為「（長＋寬）・2」，所以列式部分是正確地，但問題出在計算到「 $4+2x$ 」時仍繼續合併，從上述可知其錯誤點在於，當 S2 已經計算到最終答案「 $4+2x$ 」，代數式答案呈「 $a+bx$ 」型式時仍繼續化簡，顯然 S2 未建立「代數式化簡結果可能呈現 $a\pm bx$ 或 $ax\pm b$ 型式」之概念；歸納出 S2 出現的錯誤類型狀態如下：1. 錯誤類型理論中 Engelhardt（1982）提出的「概念化錯誤」，以及李芳樂（1993）及 Maurer（1987）提出的「系統性錯誤」，上述皆因過去學習過程中建立錯誤概念，導致應用到解題時出現錯誤；2. 屬於「有關代數符號的錯誤類型」理論中的「認為式子化簡結果為『單項式』型式」。

例題 2 錯誤類型一的解題狀態如表 20：

表 20 錯誤類型一（例題 2）之解題狀態分析

答錯考題	錯誤類型狀態	原始解題歷程	解題想法／ 解題困難點
例題 2： 已知爸爸比媽媽大 3 歲，假設用 x 歲表示媽媽的年齡，那麼爸爸的年齡可表示 _____ 歲。（請將文字敘述寫成數學算式）	S1： 屬於「有關代數符號的錯誤類型」理論中的「認為式子化簡結果為『單項式』型式」。	S1： $x+3=x3$	S1：式子經過運算後，最後答案會變成一項，加、減之類的符號不會繼續保留，所以我就繼續合併，但是我不知道「 $x+3$ 」還能怎麼繼續化簡成一項，所以我就去掉加號，然後把 x 和 3 合併再一起。

答錯考題	錯誤類型狀態	原始解題歷程	解題想法／ 解題困難點
例題 2： 已知爸爸比媽媽大 3 歲，假設用 x 歲表示媽媽的年齡，那麼爸爸的年齡可表示 _____ 歲。(請將文字敘述寫成數學算式)	S2、S4、S5： 未建構正確判斷「兩物體間數量呈倍數關係」與「物體單位個數增加」兩者差異的先備知識，無法清楚判斷應該使用加法還是乘法，導致列式錯誤。	S2、S4、S5： $x \cdot 3 = 3x$	S2、S4、S5 皆表示：看到「爸爸比媽媽大 3 歲」，不確定是要用乘法還是加法列式。

從表 20 可發現，S1 對題意是清楚的，但問題癥結點在於「認為式子經過加、減、乘、除運算後答案會變成一項，而且答案結果不該出現加、減、乘、除等運算符號」，顯然 S1 沒有建立「代數式化簡結果可能呈現 $a \pm bx$ 或 $ax \pm b$ 型式」之概念，才會硬是把答案合併成一項；此錯誤類型狀態可歸類在本研究文獻探討「有關代數符號的錯誤類型」中的第四種錯誤類型—「認為式子化簡後的結果為『單項式』的型式」；另外，S2、S4、S5 有共同解題困難點，從表 20 困難點敘述得知，其錯誤類型狀態為「未建構正確判斷『兩物體間數量呈倍數關係』與『物體單位個數增加』兩者差異的先備知識，無法清楚判斷應該用加法還是乘法列式，衍生列式結果錯誤」；此外，據上述錯誤成因類似黃淑華、鄭鈴華、王又禾與吳昭容（2014）以及蕭芷芸、陳彥廷與陳中川（2017）、Blosser（1987）等人所指出的「因某項先備概念發展不完全，導致解題錯誤」；然而在本研究文獻探討中的「有關代數符號的錯誤類型」，未提到與上述解題困難點之類似發現。

例題 3 錯誤類型一的解題狀態如表 21：

表 21 錯誤類型一（例題 3）之解題狀態分析

答錯考題	錯誤類型狀態	原始解題歷程	解題想法／ 解題困難點
例題 3： 奇奇玩投籃機總共花了 x 元，假設玩一次 30 元，請問奇奇總共玩了 _____ 次。(請將文字敘述寫成數學算式)	S2、S3、S4、S5： 未理解運算符號與代數符號之使用方式。其次，對題意的邏輯不清，且沒有「玩一次的費用 $\times$ 玩的次數=全部花費」的先備知識，導致不知如何列式。	S2、S3、S4、S5： $30 \cdot x = 30x$	S2、S3、S4、S5： 看不懂題目，疑惑要用乘法還除法，他們猜題目是要用乘的（相乘的計算較簡單）！所以把 30 和 x 兩者相乘湊成答案。

從表 21 可發現，S2、S3、S4、S5 都有提到「看不懂題目」的問題，顯然錯誤成因如同黃淑華、鄭鈴華、王又禾與吳昭容（2014）以及蕭芷芸、陳彥廷與陳中川（2017）、Blosser（1987）、Movshovitz-Hadar, Zaslavsky & Inbar（1987）等人所指出的「因閱讀能力低落，掌握不到題意，造成邏輯推理阻礙，而使用不當的運算解題策略」之錯誤類型產生；此外，研究者測驗完畢後再次講解本題時發現，學生不會解題的成因除了看不懂題目之外，另一原因是他們缺乏「玩一次的費用 $\times$ 玩的次數=全部花費」的先備知識，造成沒辦法做下步驟解題，由此可知，「先備知識的不足會造成邏輯推理與解題阻礙」，我們可把「先備知識不足」與 Engelhardt（1982）提出的「缺乏概念」兩者相互連結。

另外，本研究文獻探討中的錯誤類型理論有談到「錯誤成因其中一項包含『使用不當的運算解題策略』」，以本題為例，據研究者實際觀察發現：「學生看不懂題意，但能先初步判定本題可能是用乘法或除法列式，接著『他們會選擇使用他們最熟悉的計算方式（乘法）列式、運算』，認為說不定會猜對」，那麼從「選擇使用他們最熟悉的計算方式來列式、運算」的角度來看，這極可能造成「使用到不當的運算解題策略」，上述情形是本研究文獻探討中未提及的。

例題 4 錯誤類型一的解題狀態如表 22：

表 22 錯誤類型一（例題 4）之解題狀態分析

答錯考題	錯誤類型狀態	原始解題歷程	解題想法／解題困難點
例題 4： 已知一顆西瓜的價錢比 4 顆水梨多 5 元，假設一顆水梨 x 元，則一顆西瓜_____元。（請將文字敘述寫成數學算式）	S1： 未建構正確判斷「兩物體間數量呈倍數關係」與「物體單位個數增加」兩者差異的先備知識，無法清楚判斷應該使用加法還是乘法，導致列式錯誤。	S1： $4x \cdot 5 = 20x$	S1：不確定題目中的「多 5 元」是要用「+」還是「 $\times$ 」，但考慮到要把代數式合併成單項，所以選用乘法計算。
	S2： 屬於「有關代數符號的錯誤類型」理論中的「認為式子化簡結果為『單項式』型式」。	S2： $4x + 5$ $= (4 + 5)x$ $= 9x$	S2：清楚題意，但認為式子經過化簡後的結果只會有一項答案，加號不會繼續保留在答案中，所以試圖將常數項合併（4+5）再乘以 x ，為最終答案。

答錯考題	錯誤類型狀態	原始解題歷程	解題想法／ 解題困難點
例題 4： 已知一顆西瓜的 價錢比 4 顆水梨 多 5 元，假設一 顆水梨 x 元，則 一顆西瓜 _____元。（請 將文字敘述寫成 數學算式）	S3： 未建構正確判斷「兩 物體間數量呈倍數 關係」與「物體單位 個數增加」兩者差異 的先備知識，無法清 楚判斷應該使用加 法還是乘法，導致列 式錯誤。	S3： $4 \cdot x = 4x$	S3：不確定題目中的「多 5 元」要如何表示，所以 只算前半段。
	S5： 屬於「有關代數符號 的錯誤類型」理論中 的「認為式子化簡結 果為『單項式』型 式」。	S5： $4x + 5 = 20x$	S5：清楚題意，但認為式 子經過化簡後結果只會 有一項答案，加號不會 繼續保留在答案中，所 以試圖以 $4x \cdot 5$ 相乘後 變為一個答案。研究者 再進一步探討為何選擇 用乘法相乘而不是選擇 其他方法，經瞭解後，S5 認為：「乘法是他最熟悉 的計算方式，而且用加、 減法算的話，沒辦法合 併成一項答案；而除法 $4x \div 5$ 會是分數感覺答案 怪怪的，所以我選擇用 相乘的方式合併成一 項。」

如表 22 所示，從 S1、S3 的原始解題歷程可歸納出他們有一項共同錯誤類型狀態：「未建構正確判斷『兩物體間數量呈倍數關係』與『物體單位個數增加』兩者差異的先備知識，所以無法清楚判斷應該用加法還是乘法列式，導致列式錯誤或沒辦法完整列式。」顯然其錯誤成因類似黃淑華、鄭鈴華、王又禾與吳昭容（2014）以及蕭芷芸、陳彥廷與陳中川（2017）、Blosser（1987）等人所指稱的「因某項先備概念發展不完全，導致解題結果錯誤」；但是在本研究「有關代數符號的錯誤類型」文獻探討中，多位學者並未提到與研究者有上述類似發現。

從表 22 可發現 S2、S5 的問題點相似，對題意了解程度清晰，但他們沒有「代數式可能為 $ax \pm b$ 或 $b \pm ax$ 型式的認知，認為式子經化簡結果只會有一項答案，加號不會繼續保留在答案中，所以硬是繼續合併」。研究者再進一步追問 S5：「為何選擇用乘法相乘，而不是選擇加、減、除等其他方法合併呢？」，S5 表示：「乘法是他最熟悉的計算方式，而且用加、減法算的話，沒辦法合併成一項答案；而除法 $4x \div 5$ 除出來的答案會是分數，感覺答案怪怪的，所以我選擇用相乘的方式合併成一項。」據上述 S2、S5 的錯誤類型可被歸類在本研究文獻探討中，學者所提出「有關代數符號的錯誤類型」的第四種錯誤類型—「認為式子化簡結果為『單項式』的型式」，換句話說，「認為式子經過加、減、乘、除運算後答案會變成一項，而且答案也不應再出現加、減、乘、除等運算符號」。

綜合以上例題一至例題四的問題交叉比對與分析：例題一的題目設計上略有缺失，若題目附上長方形周長計算公式將會更完善，可避免學生錯用公式而測驗失焦；在四題題目當中，多數研究對象在例題三有看不懂題目的情形，此種錯誤類型為文獻探討中學者所指出「因閱讀能力低落，掌握不到題意，沒辦法做下一步的邏輯推理，進而使用不當的運算解題策略」，從此凸顯出解題成功的要件需具備閱讀能力、邏輯推理能力、運算能力等能力環環相扣；例題二和例題四學生的共同錯誤類型狀態有兩項：1. 未建構正確判斷「兩物體間數量呈倍數關係」與「單位個數增加」兩者差異的先備知識，無法清楚判斷應該使用加法還是乘法，導致列式錯誤；2. 對題意瞭解程度佳，但「缺乏代數式的型式可能為『 $ax \pm b$ 』、『 $b \pm ax$ 』概念，認為要化簡成一項且運算符號不保留在答案中，如『 ax 』、『 b 』型式的答案才是正確」，這種錯誤類型狀態可歸類在本研究「有關代數符號的錯誤類型」文獻探討中的「認為式子化簡結果為『單項式』型式」。

（二）錯誤類型二：代數符號簡記錯誤

1. 在「 $ax \cdot ax$ 」型式的代數式簡記，未將數字項、代數符號都做相乘步驟，導致代數式簡記錯誤。

2. 未建立代數式可能為「 $a \pm bx$ 或 $b \pm ax$ 」型式的概念，導致當化簡到「 $a \pm bx$ 或 $b \pm ax$ 」型式時，即出現「要繼續化簡到單項式（如『 ax 』、『 b 』型式）的答案才是化簡完成的念頭」。

3. 解「『含有負號』的乘法代數符號簡記」題目會把負號與減號混淆，導致乘法代數符號簡記錯誤。

4. 不知道要使用分數乘法的計算方式來做「分數型式的乘法代數符號簡記」，簡而言之，問題出在不知道解題技巧，看到題目不知要從何處下手。

5. 分數除法運算概念有誤，連帶「分數型式的除法代數符號簡記」也出錯。

此種錯誤類型題目共八題，其測驗目的為確認學生「是否已改變代數符號－乘法簡記錯誤」之錯誤類型；請參閱表 23 錯誤類型二（例題 5）至表 30 錯誤類型二（例題 12）之解題狀態分析：

例題 5 錯誤類型二的解題狀態如表 23：

表 23 錯誤類型二（例題 5）之解題狀態分析

答錯考題	錯誤類型狀態	原始解題歷程	解題想法／ 解題困難點
例題 5：下列四個敘述，何者正確？ (A) $3x$ 表示 $3+x$ 。 (B) x^2 表示 $x+x$ 。 (C) $3x^2$ 表示 $3x \cdot 3x$ 。 (D) $3x+5$ 表示 $x+x+x+5$ 。	S1、S2：對於 (C) 而言，未將數字項、代數符號都做相乘步驟。	S1、S2：選 (C)。	S1、S2：認為 (C) 選項中「數字 3 重複出現，所以只要保留一個 3 下來，然後代數符號相乘，即得出 $3x^2$ 」，所以選 (C)。
	S3、S4、S5：運算符號、代數符號性質概念錯誤，導致代數式簡記錯誤。	S3、S4：選 (A)。S5：選 (B)。	S3、S4、S5：覺得 (A) 和 (B) 都對，兩人皆認為 $3x$ 的算法來自於「 $3+x$ 」，而 x^2 的算法來自於「 $x+x$ 」，不知道要選哪個選項，所以隨意猜一個。

從表 23 可發現，S1、S2 的共同問題點在於「未將數字項 ($3 \cdot 3$) 相乘、代數符號 ($x \cdot x$) 都做相乘」，也就是說在「 $ax \cdot ax$ 」型式的代數式簡記，未將數字項、代數符號都做相乘步驟，導致代數式簡記錯誤；S3、S4、S5 在 (A)、(B) 兩選項之間挑選，因為他們認為兩選項皆正確，原因在於「認為式子經過化簡後，結果只會有一項答案，加號不會繼續保留在答案中，所以試圖去除加號，然後把兩者相乘繼續合併成一項」，也就是說 (A) $3+x$ 繼續合併成一項會變成 $3 \cdot x = 3x$ 、(B) $x+x$ 繼續合併成一項會變成 $x \cdot x = x^2$ 。此外，研究者做一個簡單口頭調查發現，全

部學生皆有個共同點—「只挑自己覺得可能正確的選項作答，卻沒有把全部選項看完」，研究者認為此行為很容易造成失分，十分可惜！

例題 6 錯誤類型二的解題狀態如表 24：

表 24 錯誤類型二（例題 6）之解題狀態分析

答錯考題	錯誤類型狀態	原始解題歷程	解題想法／ 解題困難點
例題 6：請化簡下列式子： $4 \cdot (-2x) = ?$	S1、S2：因未確實理解運算符號性質，「把負號當作減號」，缺乏正確的「負號」概念，所以用「減號」思維簡記此類型題目，進而導致「代數符號—乘法簡記」錯誤。	S1、S2： $(4-2) \cdot x = 2x$	S1、S2：認為 $(-2x)$ 代表是「減 $2x$ 」的意思。
	S3：以用「減號」思維簡記此類型題目，且將代數符號與數字重新組合，拼湊答案，導致「代數符號—乘法簡記」錯誤。	S3： 答案為 $4x-2$	S3：看到題目不知怎麼算，可是又覺得應該是用減的，所以猜答案是 $4x-2$ 。
	S5：因未確實理解運算符號性質，「把負號當作是減號」，缺乏正確的「負號」概念，所以用「減號」思維簡記此類型題目，進而導致「代數符號—乘法簡記」錯誤。	S5： 答案為 $4-2x$	S5：因不確定是要用減法還是乘法運算，所以第六題到第八題用減法運算；第九題到第十題用乘法運算，至少有一半的答對機率。

從表 24 可發現，S1、S2、S3、S5 對「『含有負號』的乘法代數符號簡記」題目有解題障礙，原因是「負號和減號分不清楚」，所以看到題目出現「 $-$ 」符號，就用減法計算或列式。；上述「把負號當作是減號」的錯誤成因類似本研究文獻探討中黃淑華、鄭鈴華、王又禾與吳昭容(2014)以及蕭芷芸、陳彥廷與陳中川(2017)、Blosser(1987)等人所指出的「因某項先備概念發展不完全，導致解題錯誤」以及

「符號長相類似造成符號類比錯誤，有所誤解」；然而在本研究文獻探討中的「有關代數符號的錯誤類型」，學者未提到「把負號與減號混淆，導致乘法代數符號簡記錯誤」相關錯誤類型，這與研究者的研究發現上有些許差異；2.S1、S2 在此依然出現「認為式子經化簡後結果只會有一項答案，且運算符號不會繼續保留在答案中（呈 ax 或 b 型式）」的想法與問題。

例題 7 錯誤類型二的解題狀態如表 25：

表 25 錯誤類型二（例題 7）之解題狀態分析

答錯考題	錯誤類型狀態	原始解題歷程	解題想法／解題困難點
例題 7：請化簡下列式子： $(-1) \cdot 4x = ?$	S1、S2、S3：未依題意進行運算、化簡，卻用「加法」進行代數符號與數字運算；甚至 S3 沒有做任何計算直接寫答案；根據學生表述「寫到厭煩而亂寫」，屬無效作答。	S1、S2： $-1x + 4x = 3x$ S3：答案為 4。	S1、S2、S3：不知道怎麼寫，覺得有點厭煩，隨便湊答案（亂寫）。
	S4：作答粗心，答案忘記加負號，屬於錯誤類型理論中 Engelhardt (1982) 以及李芳樂 (1993) 及 Maurer (1987) 提出的「隨機型錯誤」。	S4：答案為 $4x$	S4：答案忘記加負號。
	S5：因未確實理解運算符號性質，「把負號當作是減號」，缺乏正確的「負號」概念，所以用「減號」思維簡記此類型題目，進而導致「代數符號－乘法簡記」錯誤。	S5： 答案為 $4x - 1$	S5：不確定要用減法還是乘法運算，所以第六至第八題用減法運算；第九至第十題用乘法運算，至少有一半的答對機率。

如表 25 所示，S1、S2、S3 因為寫考卷寫到有點厭煩便開始亂寫，答案結果毫無邏輯，胡亂作答屬於無效作答的一種；而 S5「把負號當作是減號」，缺乏正確的「負號」概念，所以用「減號」思維簡記此類型題目，「把負號當作是減號」的

錯誤成因類似本研究文獻探討中黃淑華、鄭鈴華、王又禾與吳昭容（2014）以及蕭芷芸、陳彥廷與陳中川（2017）、Blosser（1987）等人所指出的「因某項先備概念發展不完全，導致解題錯誤」以及「符號長相類似造成符號類比錯誤，有所誤解」另外，此種錯誤類型也可歸類到陳彥廷與柳賢（2009a）、郭汾派、林光賢與林福來（1989）、郭汾派（1988）、楊素琴（2012）、戴文賓與邱守榕（1999）、Booth（1988）等多篇文獻提出的其中一項錯誤類型－「未理解運算符號與代數符號之使用方式導致後續解題錯誤」。

例題 8 錯誤類型二的解題狀態如表 26：

表 26 錯誤類型二（例題 8）之解題狀態分析

答錯考題	錯誤類型狀態	原始解題歷程	解題想法／ 解題困難點
例題 8：請化簡下列式子： $(-2) \cdot 3x = ?$	S1、S2：未依題意進行運算、化簡，卻用「加法」做代數符號與數字運算；學生表示「寫到厭煩而亂寫」，屬於無效作答。	S1、S2： $-2 + 3x = 5x$	S1、S2、S3：不知道怎麼寫，覺得有點厭煩，隨便湊答案（亂寫）。
	S3：未理解代數符號性質，而未依題意進行乘法運算、化簡拼湊出不合邏輯的答案；學生表達「寫考卷寫到厭煩而亂寫」，屬無效作答。	S3： 答案為 $-\frac{x}{2} \cdot 3$	
	S5：因未確實理解運算符號性質，「把負號當作是減號」，缺乏正確的「負號」概念，所以用「減號」思維簡記此類型題目，進而導致「代數符號－乘法簡記」錯誤。	S5： 答案為 $3x - 2$	

從表 26 可發現，S1、S2、S3 與例題 7 一樣都出現「因為考卷不會寫，覺得厭煩就開始亂寫」的現象，答案結果毫無邏輯等於是無效作答；S5 再次出現「把負號當作是減號」問題，缺乏正確的「負號」概念，所以用「減號」思維簡記此類型

題目；同樣地，其錯誤成因類似本研究文獻探討中黃淑華、鄭鈴華、王又禾與吳昭容（2014）以及蕭芷芸、陳彥廷與陳中川（2017）、Blosser（1987）等人所指出的「因某項先備概念發展不完全，導致解題錯誤」以及「符號長相類似造成符號類比錯誤，有所誤解」；另外，此種錯誤類型也可歸類到陳彥廷與柳賢（2009a）、郭汾派、林光賢與林福來（1989）、郭汾派（1988）、楊素琴（2012）、戴文賓與邱守榕（1999）、Booth（1988）等多篇文獻提出的其中一項錯誤類型－「未理解運算符號與代數符號之使用方式導致後續解題錯誤」。

例題 9 錯誤類型二的解題狀態如表 27：

表 27 錯誤類型二（例題 9）之解題狀態分析

答錯考題	錯誤類型狀態	原始解題歷程	解題想法／ 解題困難點
例題 9：請化簡下列式子： $12x \cdot \frac{3}{4} = ?$	S1：不知道「分數型式的代數符號簡記」的解題技巧，但分數約分的先備知識是具備的；此種錯誤類型歸類在文獻探討中 Engelhardt（1982）提出的「概念化錯誤」，因缺乏解題概念所導致的錯誤。	S1： $12x \cdot \frac{3}{4}$	S1：看到題目一頭霧水，不知道題目含有分數的要如何化簡，所以又把題目照抄一遍。
	S2、S3： 1.學生表述「不知道怎麼寫，感到厭煩而亂寫」，胡亂作答屬於無效作答的一種。 2.不知道「分數型式的代數符號簡記」的解題技巧，但分數約分的先備知識是具備的；此種錯誤類型歸類在文獻探討中 Engelhardt（1982）提出的「概念化錯誤」，因缺乏解題概念所導致的錯誤。	S2：答案為 $12 \cdot \frac{3}{4}$ S3：答案為 $\frac{x}{12} \cdot \frac{3}{4}$	S2、S3：看到題目含有分數不知道怎麼寫，覺得厭煩亂湊答案。

如表 27 所示，S1 看到「分數型式的代數符號簡記」題目非常茫然，S1 不知道題目含有分數的要如何化簡，所以又把題目照抄一遍，研究者進一步詢問 S1 會不會「分數約分」？S1 點頭表示：「會約分」，顯然他只是不知道「分數型式的

代數符號簡記」的解題技巧，分數約分的先備知識是具備的，此種錯誤類型歸類在文獻探討中 Engelhardt (1982) 提出的「概念化錯誤」，因缺乏解題概念所導致的錯誤；S2、S3 考卷不會寫而寫到厭煩，答案結果毫無邏輯，胡亂作答屬於無效作答的一種；研究者也同樣詢問 S2、S3 會不會「分數約分」？S2、S3 也都點頭表示：「會約分」，顯然他們也僅是不知道「分數型式的代數符號簡記」的解題技巧，錯誤類型與 S1 相同。

例題 10 錯誤類型二的解題狀態如表 28：

表 28 錯誤類型二（例題 10）之解題狀態分析

答錯考題	錯誤類型狀態	原始解題歷程	解題想法／ 解題困難點
例題 10：請化簡下列式子： $\frac{5}{6} \cdot 3x = ?$	S1、S2、S3：不知道「分數型式的代數符號簡記」的解題技巧，但分數約分的先備知識是具備的；此種錯誤類型歸類在文獻探討中 Engelhardt (1982) 提出的「概念化錯誤」，因缺乏解題概念所導致的錯誤。 S2、S3：學生表述「不知道怎麼寫，感到厭煩而亂寫」，胡亂作答屬於無效作答的一種。	S1：答案為 $\frac{5}{6} \cdot 3x$	S1：看到題目一頭霧水，不知道題目含有分數的要如何化簡，所以又把題目照抄一遍。
		S2： $\frac{5}{6} \cdot 3x = \frac{5}{6} 3x$	S2、S3：看到題目含有分數不知道怎麼寫，覺得厭煩亂湊答案。
		S3：答案為 $\frac{5}{6} \cdot \frac{x}{3}$	

如表 28 所示，S1、S2、S3 與例題 7、例題 8、例題 9 有共同的答題問題點，「因為考卷不會寫，很厭煩而亂作答」，答案結果毫無邏輯；同樣地，研究者再次詢問三位學生：「是不是因為不知道要使用分數約分技巧，所以不會簡記？」接著他們一致點頭表示：「沒錯！」顯然他們只是不知道「分數型式的代數符號簡記」的解題技巧，分數約分的先備知識是具備的，此種錯誤類型歸類在文獻探討中 Engelhardt (1982) 提出的「概念化錯誤」，因缺乏解題概念所導致的錯誤。

例題 11 錯誤類型二的解題狀態如表 29：

表 29 錯誤類型二（例題 11）之解題狀態分析

答錯考題	錯誤類型狀態	原始解題歷程	解題想法／ 解題困難點
例題 11：請化簡下列式子： $x \div 15 = ?$ （以分數型式表示）。	S1、S2、S5：分數除法運算概念錯誤，不清楚前項「 x 」應擺在分子還是分母，導致「代數符號—分數型除法簡記」錯誤。	$S1: x \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{x \cdot 15}$ $S2: x \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{x15}$ $S5: x \cdot \frac{1}{15} = x \frac{1}{15}$	S1、S2、S5：能算到 $x \cdot \frac{1}{15}$ ，但不清楚算出來後 x 應該擺在答案的分子還是分母，造成不知如何繼續化簡。

如表 29 所示，例題 11 屬於「分數除法型式的代數式簡記」，作答此種題型必須先具備完整的分數除法計算技能，才能進一步做分數除法型式的代數式簡記；從 S1、S2、S5 的原始解題歷程可發現，他們的共同問題點在於分數除法計算先備知識及技能建構不完整，雖然都能夠正確做第一步驟「前項 $\times$ 後項倒數」，但是卻不清楚「前項應擺在答案的分子還是分母」，進而導致「代數符號—分數型除法簡記」錯誤，我們可把上述錯誤成因歸納在文獻探討中，黃淑華、鄭鈴華、王又禾與吳昭容（2014）以及蕭芷芸、陳彥廷與陳中川（2017）、Blosser（1987）等人所指稱的「因某項先備概念發展不完全，導致解題結果錯誤」；此外，我們可將上述錯誤類型對應到本研究文獻探討中，學者提出的「有關代數符號的錯誤類型」理論發現—「分數型的式子化簡過程有誤」。

例題 12 錯誤類型二的解題狀態如表 30：

表 30 錯誤類型二（例題 12）之解題狀態分析

答錯考題	錯誤類型狀態	原始解題歷程	解題想法／ 解題困難點
例題 12：請化簡下列式子： $x \div (-7) = ?$ （以分數型式表示）。	S1：分數除法運算概念錯誤，不清楚前項「 x 」應擺在分子還是分母，導致「代數符號—分數型除法簡記」錯誤。	$S1: x \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{x \cdot (-7)}$	S1：能算到 $x \cdot -\frac{1}{7}$ ，但不清楚算出來後 x 應該擺在分子還是分母，不知如何繼續化簡。

答錯考題	錯誤類型狀態	原始解題歷程	解題想法／ 解題困難點
例題 12:請化簡 下列式子： $x \div$ $(-7) = ?$ (以分數型式 表示)。	S2：學生表述「不知 道怎麼寫，感到厭煩 而亂寫」，沒有做任何 計算直接寫答案，胡 亂作答屬於無效作答 的一種。	S2： $\frac{1}{x-7}$	S2：不知道怎麼 寫，覺得厭煩亂 湊答案。
	S4：作答粗心，答案 忘記加負號，屬於錯 誤類型理論中 Engelhardt (1982) 以 及李芳樂 (1993) 及 Maurer (1987) 提出的 「個人疏忽所導致的 隨機型錯誤」。	S4： $x \cdot (-\frac{1}{7}) = \frac{x}{7}$	S4：答案忘記加 上「負號」。

如表 30 所示，例題 11 與例題 12 皆屬於「分數除法型式的代數式簡記」，解此種題型必須先具備完整的分數除法計算技能，才能進一步做分數除法型式的代數式簡記；從 S1 的原始解題歷程可發現，他與例題 11 的解題有個共同問題點在於分數除法計算先備知識、技能不完整，進而導致「代數符號—分數型除法簡記」錯誤，我們可把上述錯誤成因歸納在文獻探討中，黃淑華、鄭鈴華、王又禾與吳昭容 (2014) 以及蕭芷芸、陳彥廷與陳中川 (2017)、Blosser (1987) 等人所指稱的「因某項先備概念發展不完全，導致解題結果錯誤」；此外，我們可將上述錯誤類型對應到本研究文獻探討中，學者提出的「有關代數符號的錯誤類型」理論發現—「分數型的式子化簡過程有誤」。

而 S2 胡亂作答屬於無效作答；S4 答案結果忘記加上「負號」，其錯誤類型屬於李芳樂 (1993) 所提出的「因疏忽、粗心而出現錯誤」，也可以歸類在 Mayer (1985) 提出三項解題錯誤類型中的「遺漏的錯誤」。

綜合例題五至例題十二的問題交叉比對、分析發現：學生作答含有負號的乘法簡記之題目，會「把負號當作是減號」，缺乏正確的「負號」概念，所以用「減號」思維簡記此類型題目，只不過他們相減過程方式不一樣；上述「把負號當作是減號」的錯誤成因類似本研究文獻探討中黃淑華、鄭鈴華、王又禾與吳昭容 (2014)

以及蕭芷芸、陳彥廷與陳中川（2017）、Blosser（1987）等人所指出的「因某項先備概念發展不完全，導致解題錯誤」以及「符號長相類似造成符號類比錯誤，有所誤解」；然而在本研究文獻探討中，學者未提到「把負號與減號混淆，導致乘法代數式符號簡記錯誤」的類似理論，這與本研究發現有些許差異。

另外，多位學生在分數型式的代數式化簡過程中，出現三項共同問題：一、不清楚「分數型式的乘法代數符號簡記」解題技巧，不知道從何處開始解題；此種錯誤類型歸類在文獻探討中 Engelhardt（1982）提出的「概念化錯誤」，因缺乏解題概念所導致的錯誤；二、分數除法運算概念錯誤，分數除法基礎運算出現問題，導致「代數符號一分數型除法簡記」錯誤；三、常出現「因考題不會寫覺得厭煩而胡亂作答」衍生無效作答之情形。

（三）錯誤類型三：代數符號及數字同類項合併、記錄錯誤

1. 未將含 x 、 y 項及常數項先分類、括號做分別處理，再進行加、減運算，卻將不同型式的項次混在一起計算、合併，導致代數式化簡錯誤。

2. 沒有代數式可能為「 $a \pm bx$ 或 $b \pm ax$ 」型式的認知，導致當他們化簡到「 $a \pm bx$ 或 $b \pm ax$ 」型式時，自動出現「要繼續化簡到單項式才是化簡完成」的念頭。

此種錯誤類型的題目共三題，其測驗目的為確認學生「是否已修正代數符號及數字同類項合併、記錄錯誤」之錯誤類型；請參閱表 31 錯誤類型三（例題 13）至表 33 錯誤類型三（例題 15）之解題狀態分析。

例題 13 錯誤類型三的解題狀態如表 31：

表 31 錯誤類型三（例題 13）之解題狀態分析

答錯考題	錯誤類型狀態	原始解題歷程	解題想法／ 解題困難點
例題 13： 請化簡下列式 子： $2x + 6 - 7 +$ $3x = ?$	S1： 1.因疏忽而造成列式瑕疵，屬於錯誤類型理論中 Engelhardt（1982）、李芳樂（1993）及 Maurer（1987）提出的「因個人疏忽所導致的隨機型錯誤」。 2.未能正確地將代數符號、數字做分別處理，導致代數式合併與化簡出現錯誤。 3.「有關代數符號的錯誤類型」理論中的「認為式子化簡結果為『單項式』型式」。	S1： $2x + 3x = 5x$ $-6 - 7 = -13$ $5x - 13 = -8x$	S1：誤把 +6 看成 -6；先把有 x 項係數做加減運算，接著把數字項做運算，最後再把兩項係數做運算，並加上 x ，合併成一項。

答錯考題	錯誤類型狀態	原始解題歷程	解題想法／ 解題困難點
例題 13： 請化簡下列式 子： $2x+6-7+3x=?$	S2： 1.未正確地將代數符號、數字 項分別合併，卻將前兩項與後 兩項的係數合併與運算，導致 代數式合併與化簡錯誤。 2.「有關代數符號的錯誤類 型」理論中的「認為式子化簡 結果為『單項式』型式」。	S2： $(2+6)x-(7+3)x=8x-10x=-2x$	S2：前兩項的 係數相加，得 $8x$ ；後兩項的 係數相加，得 $10x$ ；最後再 把 $8x$ 、 $10x$ 相 減，合併成一 項。
	S3：未正確地將代數符號、數 字做分別合併，而將每項係數 相加減後的結果，再加上 x ， 導致代數式合併與化簡錯誤。	S3： $(2+6-7+3)+x=4+x$	S3：分別把係 數加減運算 後，再加 x 。
	S4、S5： 1.未正確地將代數符號、數字 做分別合併，而將每項係數相 加減後的結果，再乘上 x ，導 致代數式合併與化簡錯誤。 2.「有關代數符號的錯誤類 型」理論中的「認為式子化簡 結果為『單項式』型式」。	S4、S5： $(2+6-7+3)\cdot x=4x$	S4、S5：把全 部的係數加 減運算後，再 乘以 x ，合併 成一項。

根據表 31 所示，可將例題 13 的錯誤類型歸類到陳彥廷與柳賢（2009a）、郭汾派、林光賢與林福來（1989）、郭汾派（1988）、楊素琴（2012）、戴文賓與邱守榕（1999）、Booth（1988）等多篇文獻提出的其中一項錯誤類型－「未能正確地將係數、代數符號分別處理」；表 18 呈現四種不同錯誤類型狀態，第一種為「分別把含有 x 項、係數項做合併，再接續將其結果合併成一項」；第二種為「將前兩項的係數相加後乘以 x ，後兩項的係數相加後乘以 x ，最後再把兩項相減合併成一項答案」；第三種為「將所有係數依序加減運算後再加 x 」；第四種為「將所有係數依序加減運算後再乘以 x ，得到一項答案」；在本研究「有關代數符號錯誤類型－未能將係數、代數符號分別處理」的文獻探討中，有提到與上述第三種、第四種類似的錯誤類型狀態，但未提到與上述第一種、第二種相關的錯誤類型狀態，這與本研究發現有些許差異。

此外，從表 31 也可發現，S1、S2、S4、S5 作答本題型仍存在「要把最終答案結果合併成一項」的想法，與前面「代數式列式」、「代數符號簡記」的錯誤類型狀態是有關連性的，此錯誤類型狀態可歸類在本研究文獻探討「有關代數符號的錯誤類型」中的第四種錯誤類型－「認為式子化簡結果為『單項式』的型式」，也就是說「認為式子經過加、減、乘、除運算後答案會變成一項，而且答案中不該再出現運算符號」。

例題 14 錯誤類型三的解題狀態如表 32：

表 32 錯誤類型三（例題 14）之解題狀態分析

答錯考題	錯誤類型狀態	原始解題歷程	解題想法／ 解題困難點
例題 14： 請化簡下列式子： $6x + 3(x - 1) = ?$	S1： 1. 因疏忽而造成列式有瑕疵，屬於錯誤類型理論中 Engelhardt (1982) 以及李芳樂 (1993) 及 Maurer (1987) 提出的「隨機型錯誤－因個人疏忽所導致的錯誤」。 2. $3(x - 1)$ 展開過程有誤。 3. 未能正確地將代數符號、數字做分別處理，導致代數式合併與化簡出現錯誤。 4. 「有關代數符號的錯誤類型」理論中的「認為式子化簡結果為『單項式』型式」。	S1： $6x + 3(x + 1)$ $= 6x + x + 3$ $= (6 + 1 + 3)x$ $= 10x$	S1：誤把 -1 看成 $+1$ ；不清楚 $3(x - 1)$ 如何展開；認為把各項係數相加，之後加上 x ，合併成一項，即得出答案。

答錯考題	錯誤類型狀態	原始解題歷程	解題想法／ 解題困難點
例題 14： 請化簡下列式子： $6x+3(x-1)=?$	S2： 1. 因疏忽而造成計算錯誤，屬於錯誤類型理論中 Engelhardt (1982)、李芳樂 (1993) 及 Maurer (1987) 提出的「隨機型錯誤－因個人疏忽所導致的錯誤」。 2. $3(x-1)$ 展開，未做到 $3 \cdot (-1)$ 之步驟。 3. $3 \cdot x$ 寫成等於 x^3 。	S2： $6x+x^3-1$ $= (6x+x) + (3-1) = 7x-2$	S2： $6x+x^3$ 計算錯誤；忘記把 $3 \cdot (-1)$ 展開。
	S3、S4：因 $3(x-1)$ 展開過程，未做到 $3 \cdot (-1)$ 之步驟，導致後續合併、化簡有誤。	S3： $6x+3(x-1)$ $= 6x+3x-1$ $= 9x-1$ S4： $6x+3(x-1)$ $= 6x+3x$ $= 9x$	S3：把 $3(x-1)$ 展開，之後做運算。 S4：答題時沒有想到要做「 $3 \cdot (-1)$ 」步驟
	S5：寫到「 $6x+3x-3$ 」後，未能正確地將代數符號與數字做合併運算，而是把式子的各項係數做加減，將其結果加上 x ，合併成一項。	S5： $6x+3(x-1)$ $= 6x+3x-3$ $= (6+3-3)x$ $= 6x$	S5：寫到「 $6x+3x-3$ 」，接續將各項係數加減運算後，再乘以 x ，合併成一項完成化簡。

根據表 32 歸納出學生主要的錯誤類狀態有四項：1. 列式或計算過程有瑕疵，屬於錯誤類型理論中 Engelhardt (1982)、李芳樂 (1993) 及 Maurer (1987) 提出的「因個人疏忽所導致的隨機型錯誤」；2. 「 $3(x-1)$ 」類型的式子展開過程有誤，此種錯誤類型類似本研究文獻探討「有關代數符號的錯誤類型」理論中「分配

律運算過程不完整」所造成的錯誤，此錯誤源自於學生本身缺乏正確的「分配律」概念，有些人只把括號前的數字項與括號內第一項相乘，或是只把括號前的數字與括號內第二項相乘，導致未能完整把式子展開，影響到代數式合併的正確性；3. 學生作答本題仍出現前面「認為式子化簡結果為『單項式』的型式」的錯誤類型狀態；4. 本題的核心錯誤與例題 13 類似，「未能正確地將係數、代數符號分別處理」。

例題 15 錯誤類型三的解題狀態如表 33：

表 33 錯誤類型三（例題 15）之解題狀態分析

答錯考題	錯誤類型狀態	原始解題歷程	解題想法／ 解題困難點
例題 15： 請化簡下列式子： $(3x-1) + (6x+9) = ?$	S1： 1. 未能正確地將代數符號、數字做分別處理，導致代數式合併與化簡出現錯誤。 2. 「有關代數符號的錯誤類型」理論中的「認為式子化簡結果為『單項式』型式」。	S1： $3-1=2$ ，得 $2x$ ； $6+9=15$ ，得 $15x$ ； $2x+15x=17x$	S1：分別把 $(3x-1)$ 和 $(6x+9)$ 的係數做運算，各得出 $2x$ 、 $15x$ 後，相加即得出答案。
	S2：1. 未正確地將代數符號、數字項分別合併，卻將前兩項與後兩項的係數合併與運算，導致代數式合併與化簡錯誤。 2. 「有關代數符號的錯誤類型」理論中的「認為式子化簡結果為『單項式』型式」。	S2： $(3x-1) + (6x+9) = 2x+15x = 17x$	S2：前兩項的係數相減再乘以 x ，得 $2x$ ；後兩項的係數相加再乘以 x ，得 $15x$ ；最後再把 $2x$ 、 $15x$ 相加，合併成一項。
	S3：未能正確地將代數符號與數字做合併運算，而是把式子的各項係數做加減，將其結果加上 x 。	S3： $(3-1+6+9) + x = 17+x$	S3：分別把係數與數字項加減運算後，再加 x 。

例題 15： 請化簡下列式子： $(3x-1) + (6x+9)$ $= ?$	S4、S5：未正確地將 代數符號、數字做分 別合併，而將每項係 數相加減後的結果， 再乘上 x ，導致代數 式合併與化簡錯誤。	S4、S5： $(3-1+6+9) x$ $= 17 \cdot x$	S4、S5：分別 把係數與數 字項加減運 算後，再乘以 x 。
--	--	---	---

由表 33 可發現，學生於例題 13 與例題 15 皆出現「未能正確地將係數、代數符號分別處理」相似問題，也誠如例題 13 的四種錯誤類型狀態：1. 「分別把含有 x 項、係數項做合併，再接續將其結果合併成一項」；2. 「將前兩項的係數相加後乘以 x ，後兩項的係數相加後乘以 x ，最後再把兩項相減合併成一項答案」；3. 「將所有係數依序加減運算後再加 x 」；4. 「將所有係數依序加減運算後再乘以 x ，得到一項答案」。

綜合表 19 至表 33，歸納出錯誤類型之狀態分析，分述如下：

1. 「未能正確運用代數符號記錄成代數式」：

(1) 因閱讀能力低落，掌握不到題意，而未能做進一步的邏輯推理，進而使用不當的運算解題策略；

(2) 未建構正確判斷「兩物體間數量呈倍數關係」與「物體單位個數增加」兩者差異的先備知識，無法清楚判斷應該使用加法還是乘法，導致列式錯誤。；

(3) 認為式子化簡後結果為「單項式」的型式。

2. 「代數符號簡記錯誤」：

(1) 作答含有負號的乘法簡記之題目，會「把負號當作是減號」，缺乏正確的「負號」先備知識，所以用「減號」思維簡記此類型題目；

(2) 不清楚「分數型式的代數符號簡記」的解題技巧，但本身已具備分數約分的先備知識；

(3) 分數除法運算概念錯誤，因不清楚前項「 x 」應擺在答案的分子還是分母，導致「代數符號—分數型除法簡記」錯誤；

(4) 常出現「因考題不會寫覺得厭煩而胡亂作答」衍生無效作答之情形。

3. 「代數符號及數字同類項合併、記錄錯誤」：

(1) 未能正確地將係數、代數符號分別處理」：

A. 分別把含有 x 項、係數項做合併，再接續將其結果合併成一項；

B. 將前兩項的係數相加後乘以 x ，後兩項的係數相加後乘以 x ，最後再把兩項相減合併成一項答案；

C. 將所有係數依序加減運算後再加 x ；

D. 將所有係數依序加減運算後再乘以 x ，得到一項答案」；

(2) 認為式子化簡結果為「單項式」型式；

(3) 「 $3(x-1)$ 」型式展開過程有誤，未建構正確的「分配律」概念，導致未能完整展開代數式，進而影響到「代數符號及數字同類項合併」之正確性；

(4) 因個人疏忽所導致的隨機型錯誤。

綜合上述，三種錯誤類型可分支出數種不同錯誤類型狀態；此外，也發現到學生的錯誤類型狀態有重疊性，而且一項錯誤概念會接連影響到運用代數符號列出代數式、代數符號簡記、代數式的合併與化簡等題型的作答，例如：有「認為式子化簡結果為『單項式』型式」這項錯誤概念，就會接連在代數符號列出代數式、代數符號簡記、代數式的合併與化簡等題型出現相同錯誤，可見建構正確概念是答題正確的重要關鍵。



第二節 三項錯誤類型補救教學對學生的學習成效影響

本節旨在探討研究對象接受「一元一次方程式－以符號列式與運算」三項錯誤類型補救後其學習成效影響。經過四堂課的補救教學，研究者對研究對象進行「一元一次方程式－以符號列式與運算」後測筆試，並將後測成績作為本研究的數學學習成效後測數據；後測試題共15題，分別依據三項錯誤類型設計題目，分布說明如下：（一）未能正確運用運算符號與代數符號記錄成代數式；共4題。（二）代數符號簡記錯誤；共8題。（三）未能正確地將代數符號、數字做分別處理，導致代數式的合併與化簡出現錯誤；共3題。

根據研究者蒐集的數學學習成效前、後測數據，分成以下五部分：（一）如何有效修正三種錯誤類型；（二）描述性統計分析；（三）相依樣本t檢定分析；（四）「一元一次方程式－以符號列式與運算」後測答題情形；（五）「一元一次方程式－以符號列式與運算」後測錯誤類型之狀態分析。

一、有效修正三種錯誤類型之概念

（一）能學會正確依據題意列出正確的代數式

1. 釐清代數式基本概念十分重要，那麼要如何解釋才能讓學生清楚理解「什麼是代數式」呢？研究者建議可使用以下方式講解「何謂代數式」：「用 $+$ 、 $-$ 、 $\times$ 、 $\div$ 符號把 x 、 y 等代數符號和數字連接起來，長這樣的式子稱為代數式」這句話，然後在一邊講解文字的過程，也一面寫出類似「 $x+3$ 」、「 $x-4$ 」、「 $y\times 7$ 」、「 $z\div 5$ 」等式子，學生即清楚理解代數式定義，學習的當下就把代數式的樣子印記到腦海中；瞭解代數式定義後，接著強調「文字符號也可以像數字一樣可以做運算，經過運算後代數式的化簡結果可能呈現 $a+5$ 、 $x-4$ 型式，所以從這樣的概念我們可以知道，運算、化簡後的答案型式不一定是單項式（ 5 或 $3x$ 等型式）」，整體概念教授後成功修正「認為式子化簡結果為『單項式』型式」之錯誤概念。

2. 特別強調看到題目要求「要將題目的文字敘述寫成數學算式」時，我們就依題意列式即可；答題過程若遇到困難可試著畫圖、列表拆解題意以幫助列式。

3. 遇到類似像「假設一顆水梨為 x 元，一顆西瓜的價錢比4顆水梨多5元，試問一顆西瓜多少元？請將文字敘述寫成代數式」的題目，學生的盲點在於「不確定題目中的『多5元』是要用『 $+$ 』還是『 $\times$ 』列式」；為了釐清概念，研究者先簡化題目問學生：「我身上有3元，你身上的錢比我多5元，請問你身上有多少元？」此時學生就說：「 $3+5$ 等於8，所以我身上有8元」；之後再舉一個有關倍數的題目並問學生：「我身上有3元，你身上的錢是我的5倍，請問你身上有多少

元？」此時學生就說：「 3×5 等於 15，所以我身上有 15 元」，同時告訴學生萬一分不清楚的時候，就可以用老師舉的這個例子來反推題目，判斷應該要用加法還是加法列式。利用簡易的舉例幫助學生釐清盲點，有效修正列式錯誤的問題。

4. 遇到類似像教案 (I) 範例 4 的類似題型，研究者把題目所要問的概念列在黑板上，然後先降低題目難度，用具體數字代入題目，並且列表格講解表格內容的相互關係，使他們對題目有相當程度的理解；等學生完全理解後再回歸到原題目，代數式列式的正確率有顯著提升。

(二) 能正確作答代數式簡記題目

1. 作答「 $ax \cdot ax$ 」型式的代數式簡記時，必須將數字項、代數符號都做相乘步驟；也就是說「 $ax \cdot ax = (a \cdot a) \cdot (x \cdot x) = a^2 x^2$ 」，例如：「 $3x \cdot 3x = 9x^2$ 」，先講解基本概念並舉個簡易例子，學生就很容易理解。

2. 研究者在教材中的範例有特別強調「 $x \cdot (-a)$ 」型式簡記的意義；首先，題目是「 x 乘以 $(-a)$ 」，所以一定是用乘法來簡記，絕非用減法來表示，而且既然是乘法就會和「倍數」有關聯性。舉例來說， $x \cdot (-2)$ 相乘後可簡記為 $-2x$ ，而這個 (-2) 有倍數的意涵，也就是說這個 (-2) 是 x 的倍數，所以我們可把這個 $-2x$ 稱為 x 的 -2 倍。透過倍數概念講解「 $x \cdot (-a)$ 」型式的簡記意義後，學生就能夠理解括號裡面的「 $-$ 」符號是負號而不是減號，成功修正學生在「 x 乘以 $(-a)$ 」型式的代數符號簡記題目中，誤把負號理解成減號的問題。

3. 直接提示學生遇到「分數型乘法代數式簡記」的題型，「就跟計算分數乘法的做法一樣，只不過題目裡面多了 x 、 y 等代數符號」，排除了學生不知道要怎麼計算此種類型的題目的困惑。

4. 「分數型除法代數式簡記」錯誤起因於不會分數除法計算，所以研究者先教導學生分數除法的運算方式，並舉例說明，例如：「 $5 \div 6$ 要用分數表示的話，要先將 5 乘以 6 的倒數即為 $5 \cdot \frac{1}{6}$ ，就可以得知答案為 $\frac{5}{6}$ 」，我們由上面的計算過程可觀察一個計算規則，「除以某一個數，等於乘以該數字的倒數」；學生依循上述計算規則，回歸到含有代數符號的「分數型除法代數式簡記」題目，能夠正確回答其計算過程，順利修正「分數型除法代數式簡記」之錯誤。

(三) 能正確將代數符號同類項合併與化簡

1. 研究者舉實例，教導學生「先把含有 x 的項次用紅筆圈起來，把它們視為同一家族的人，接著把只有數字的項次用藍筆圈起來，把它們視為另一家族的人；研究者確認沒問題後，請學生把含有代數符號的項次括號一起，把常數項括號一起，列完算式後進行加減計算」，即為代數符號同類項合併與化簡之步驟。

2. 若此類型題目含有括號，就是多一個步驟先除去括號，之後繼續依循上述方法進行合併與化簡；研究者用精熟學習之教學模式，讓學生習得正確解題技巧後，搭配大量習題演練，成功提升「代數符號同類項合併與化簡」解題精熟度與正確率。

二、描述性統計分析

如表34、表35、表36、表37所示，本研究個別將前測成績、後測成績、前、後測各個的錯誤類型一、錯誤類型二、錯誤類型三之成績進行描述性統計，分別得出標準差（SD）、變異數（ S^2 ），比較補救前與補救後學生在這三項錯誤類型中的學習成效差異情形。

表34 前、後測成績—描述性統計分析（N=5）

學生	前測 成績	後測 成績	前測 標準差 (SD)	後測 標準差 (SD)	前測 變異數 (S^2)	後測 變異數 (S^2)
S1	7	105	16.115	11.713	259.700	137.200
S2	0	91				
S3	21	91				
S4	42	77				
S5	21	105				

表35 錯誤類型一成績描述性統計分析（N=5）

錯誤類型	題號	前測 成績	後測 成績	前測 標準差 (SD)	後測 標準差 (SD)	前測 變異數 (S^2)	後測 變異數 (S^2)
未能正確運用 運算符號與代 數符號記錄成 代數式	一	0	35	3.500	.000	12.250	.000
	二	7	35				
	三	7	35				
	四	7	35				

表36 錯誤類型二成績描述性統計分析（N=5）

錯誤 類型	題號	前測 成績	後測 成績	前測 標準差 (SD)	後測 標準差 (SD)	前測 變異數 (S^2)	後測 變異數 (S^2)
代數符號 簡記錯誤	五	0	28	6.205	2.475	38.500	6.125
	六	7	35				

七	0	35
八	7	35
九	14	35
十	14	35
十一	14	35
十二	14	35

表37 錯誤類型三成績描述性統計分析 (N=5)

錯誤類型	題號	前測 成績	後測 成績	前測 標準差 (SD)	後測 標準差 (SD)	前測 變異數 (S ²)	後測 變異數 (S ²)
未能正確地 將代數符號、 數字做分別 處理，導致代 數式的合併 與化簡出現 錯誤	十三	0	21				
	十四	0	14	.000	4.041	.000	16.333
	十五	0	14				

三、相依樣本t檢定分析

本研究以同質的相依樣本進行前、後測檢定，瞭解補救後前、後測成績是否有顯著差異，以探究補救成效，因本研究僅5名研究對象，故本研究採用小樣本統計檢定；如表38所示，「整體學習成效前、後測總成績相依樣本t檢定」達顯著差異 ($t=8.485, p=.000<.05$)，顯示出本研究針對「一元一次方程式－三項錯誤類型」補救具有正向成效；另外，如表39、表40、表41所示，錯誤類型一 ($t=19.070, p=.000<.05$)、錯誤類型二 ($t=8.496, p=.000<.05$)、錯誤類型三 ($t=9.037, p=.000<.05$)，表示三項錯誤類型中每一項錯誤類型之「前、後測成績相依樣本t檢定」皆達顯著差異，補救教學具有良好效果，但由於樣本數小於30份不具代表性，因此無法將此補救結果推論到母群體，也就是說研究者的教學設計若應用於其他同年級補救教學對象很難推定補救成效都是良好的。

整體學習成效－前、後測總成績相依樣本t檢定如表38：

表38 整體學習成效－前、後測總成績相依樣本t檢定 (N=5)

—	人數	平均數 (M)	標準差 (SD)	t	p
前測	5	18.20	16.115	8.485	.000
後測	5	93.80	11.713		

如表38所示，研究者先對5名受試者進行前測，得平均分數18.2分，標準差16.115分；經初次補救後，再對這5名受試者進行後測，得平均分數93.8分，標準差11.713分，那麼「一元一次方程式－三項錯誤類型」補救教學對這5名研究對象是

否有良好成效？我們將虛無假設與對立假設建立為
$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0 \end{cases}$$
，在 $\alpha=0.05$

下，右尾檢定時的臨界值可查t值表得1.717，而檢定統計量t為8.485，因此將落入拒絕域，拒絕虛無假設 H_0 ，即在顯著水準 $\alpha=0.05$ 下，有充分證據顯示「一元一次方程式－三項錯誤類型」補救教學有良好成效。

錯誤類型一學習成效－前、後測成績相依樣本t檢定如表39：

表39 錯誤類型一學習成效－前、後測成績相依樣本t檢定 (N=5)

錯誤類型一 (第一題至 第四題)	前測平均 (M)	後測平均 (M)	總分	t	p
未能正確運用 運算符號與代 數符號記錄成 代數式	5.25	35.00	28	19.070	.000

如表 39 所示，受試者於前測的錯誤類型一試題平均分數為 5.25 分，後測的錯誤類型一試題平均分數為 35 分，那麼第一項錯誤類型之補救教學對這 5 名研究對

象是否有良好成效？我們將虛無假設與對立假設建立為
$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0 \end{cases}$$
，在 $\alpha=$

0.05 下，右尾檢定時的臨界值可查 t 值表得 1.717，而檢定統計量 t 為 19.070，因此將落入拒絕域，拒絕虛無假設 H_0 ，即在顯著水準 $\alpha=0.05$ 下，有充分證據顯示「運用運算符號與代數符號記錄成代數式」之錯誤類型補救教學有正向效果。

錯誤類型二學習成效－前、後測成績相依樣本 t 檢定如表 40：

表 40 錯誤類型二學習成效—前、後測成績相依樣本 t 檢定 (N=5)

錯誤類型二 (第五題至第十二題)	前測平均 (M)	後測平均 (M)	總分	t	p
代數符號簡記 錯誤	8.75	34.13	40	8.496	.000

如表 40 所示，受試者於前測的錯誤類型二試題平均分數為 8.75 分，後測的錯誤類型二試題平均分數為 34.13 分，那麼第二項錯誤類型之補救教學對這 5 名研究對象是否有良好成效？我們將虛無假設與對立假設建立為 $\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0 \end{cases}$ ，在 $\alpha = 0.05$ 下，右尾檢定時的臨界值可查 t 值表得 1.717，而檢定統計量 t 為 8.496，因此將落入拒絕域，拒絕虛無假設 H_0 ，即在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，有充分證據顯示「代數符號簡記」錯誤類型之補救教學具良好成效。

錯誤類型三學習成效—前、後測成績相依樣本 t 檢定如表 41：

表 41 錯誤類型三學習成效—前、後測成績相依樣本 t 檢定 (N=5)

錯誤類型三 (第十三題至第十五題)	前測平均 (M)	後測平均 (M)	總分	t	p
未能正確地將代 數符號同類項合 併並記錄下來	0	16.33	21	9.037	.000

如表 41 所示，受試者於前測的錯誤類型三試題平均分數為 0 分，後測的錯誤類型三試題平均分數為 16.33 分，那麼第三項錯誤類型之補救教學對這 5 名研究對象是否有正向成效？我們將虛無假設與對立假設建立為 $\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0 \end{cases}$ ，在 $\alpha = 0.05$ 下，右尾檢定時的臨界值可查 t 值表得 1.717，而檢定統計量 t 為 9.037，因此將落入拒絕域，拒絕虛無假設 H_0 ，即在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，有充分證據顯示「代數符號同類項合併並記錄下來」錯誤類型之補救教學具正向成效。

四、「一元一次方程式—以符號列式與運算」後測答題情形

研究者利用「答錯率」、「平均答錯率」公式，初略分析研究對象後測答題情形（如表 42），計算公式如下：

$$\text{答錯率} = \frac{\text{答錯人數}}{\text{總人數}} \times 100\% ; \text{平均答錯率} = \frac{\text{單一錯誤類型答錯率}}{\text{單一錯誤類型總題數}} \times 100\%$$

$$\text{例：錯誤類型三的平均答錯率} = \frac{40 + 60 + 60}{3} \% = 53.33$$

表 42 「一元一次方程式—以符號列式與運算」後測答題情形分析（N=5）

錯誤類型	題號	答錯人數	答錯率%	平均答錯率%
一、未能正確運用運算符號與代數符號記錄成代數式	例題 1	0	0	0
	例題 2	0	0	
	例題 3	0	0	
	例題 4	0	0	
二、代數符號簡記錯誤	例題 5	1	20	20
	例題 6	0	0	
	例題 7	0	0	
	例題 8	0	0	
	例題 9	0	0	
	例題 10	0	0	
	例題 11	0	0	
	例題 12	0	0	
三、未能正確地將代數符號、數字做分別處理，導致代數式的合併與化簡出現錯誤	例題 13	2	40	53.33
	例題 14	3	60	
	例題 15	3	60	

從表 42 可發現，錯誤類型一之試題答對率已達 100%，全數學生皆能掌握「運用運算符號與代數符號記錄成代數式」之題型，也就是代表研究對象已完全修正錯誤類型一之錯誤概念；錯誤類型二的平均答對率也高達 80%，只有一位學生在錯誤類型二的試題中答錯一題，代表大多數學生已能掌握「代數符號簡記」之題型；然而錯誤類型三的試題平均答錯率高達 53.33%，五位受試者當中就有二至三位受試者答錯，答題表現不盡理想，代表此種錯誤類型尚未完全修正，需重新建立正確概念。

綜合上述，全部受試者「錯誤類型一」之錯誤概念已完全被修正；部分受試者「錯誤類型二」、「錯誤類型三」的錯誤概念並未完全修正，部分概念尚待重新建立。

五、「一元一次方程式—以符號列式與運算」後測錯誤類型之狀態分析

如表 43 至表 47 研究者依據學生後測試卷答錯試題，訪談原始解題歷程的想法、困難點，進行錯誤類型狀態分析。

表 43 錯誤類型一之解題狀態分析（後測）

答錯考題	錯誤類型狀態	原始解題歷程	解題想法／ 解題困難點
無	—	—	—

表 44 錯誤類型二之解題狀態分析（後測）

答錯考題	錯誤類型狀態	原始解題歷程	解題想法／ 解題困難點
例題 5：下列四個敘述，何者正確？ (A) x^2 表示 $x+x$ 。(B) $8x$ 表示 $8+x$ 。 (C) $8x^2$ 表示 $8x \cdot 8x$ 。 (D) $5x+6$ 表示 $x+x+x+x+x+6$ 。	S4：對於 (C) 而言，未將數字項、代數符號都做相乘步驟。	S4：答案選 (C)	S4：認為 (C) 選項中「數字 8 重複出現，所以只要保留一個 8 下來，然後代數符號相乘，即得出 $8x^2$ 」，所以選 (C)。

如表 44 所示，比對前測試卷的例題 5 與本題題型類似，S4 於前測選擇類似本題的 (A) 選項；訪談 S4 的解題想法及困難點後，發現他前測的錯誤概念已修正，

並能正確地將 (A) 選項修改為「 x^2 表示 $x \cdot x$ 」, (B) 選項修改為「 $8x$ 表示 $8 \cdot x$ 」; 在作答過程中他將 (A)、(B) 選項刪除, 剩下 (C)、(D) 選項在做選擇, 之所以最後選 (C) 的原因, S4 認為選項中「數字 8 重複出現, 所以只要保留一個 8 下來, 然後代數符號相乘, 即得出 $8x^2$ 」所以選 (C), 由此可知, 其錯誤類型為「未將數字項 ($8 \cdot 8$) 相乘、代數符號 ($x \cdot x$) 都做相乘」; 然而之所以沒有選 (D) 的原因, 是因為挑了 (C) 選項後, 就沒有仔細看完 (D) 選項的內容, 「沒有把全部選項看完」的問題又重蹈覆轍。

表 45 錯誤類型三 (例題 13) 之解題狀態分析 (後測)

答錯考題	錯誤類型狀態	原始解題歷程	解題想法／ 解題困難點
例題 13： 請化簡下列式子： $8x + 3 + 5x - 7 = ?$	S4： 未正確將代數符號、數字分別合併，而將各項係數加總，並將其結果乘以 x ，導致代數式合併與化簡錯誤。	S4： $8x + 3 + 5x - 7$ $= (8 + 3 + 5 - 7) x = 10x$	S4： 先把係數加總，然後再將其結果乘上 x ，得出答案。

如表 45 所示，比對前測試卷例題 13 與本題題型類似，S4 於前測例題 13 的計算過程與表 46 的原始解題歷程做法相同，都是「先把係數加總，然後再將其結果乘上 x ，得出答案。」在訪談過程中，研究者再次教導與重建 S4 正確概念，「先請他說出哪兩項含有代數符號，哪兩項是常數項；確認沒問題後，請他把含有代數符號的兩項括號一起分成一堆，常數項括號一起分成一堆，也就是 $(8x + 5x) + (3 + 7)$ ；確認沒問題後，問 S4：『 $(8x + 5x)$ 等於多少？』S4 回答：『 $13x$ 』，再問 S4：『 $(3 + 7)$ 等於多少？』S4 回答：『 10 』，最後問 S4：『那兩項相加合併答案會是什麼呢？』S4 回答：『答案是 $13x + 10$ 嗎？』研究者回應 S4：『沒錯！代數式的合併與化簡的方法就是這樣』S4 也表示：「老師重新教他一遍，勾起他之前所學過的內容」顯然 S4 對於「代數式的合併與化簡方法」並非完全陌生，只是尚未進入到長期記憶，需要再多做類似練習達到精熟學習階段。

表 46 錯誤類型三（例題 14）之解題狀態分析（後測）

答錯考題	錯誤類型狀態	原始解題歷程	解題想法／ 解題困難點
例題 14： 請化簡下列 式子： $(6x+10)+$ $(2x-8)$ $=?$	S2： x 項係數計算錯 誤；S3：筆誤，把「 $+$ 2 」寫成「 -2 」。 疏忽造成的錯誤，屬 於錯誤類型理論中 Engelhardt (1982)、 李芳樂 (1993) 及 Maurer (1987) 提出 的「因個人疏忽所導 致的隨機型錯誤」。	S2： $(6x+10) + (2x-8)$ $= (6x+2x) + (10-8)$ $= 10x+2$ S3： $(6x+10) + (2x-8)$ $= (6x+2x) + (10-8)$ $= 8x-2$	S2、S3： 先把有 x 項 的合併起來， 然後也把數 字項合併，之 後進行運算。
	S4： 未正確將代數符號、 數字分別合併，而將 括號內的係數相加 減後的結果乘上 x ， 再將兩項相加，導致 代數式合併與化簡 錯誤。	S4： $(6x+10) + (2x-8)$ $= 16x-6x$ $= 10x$	S4：忘記怎麼 算！突發奇想 把前項括號 內係數相減 $(6+10)$ ，再 乘上 x ，得 $16x$ ；後項括 號內係數相 減 $(2-8)$ ， 再乘上 x ，得 $-6x$ ；接著把 兩項相加得 出答案。

由表 46 可發現，S2、S3 皆能夠正確地按照步驟「先去除括號，接著把含有代數符號的兩項括號合併一起，常數項括號合併一起，接著進行加減運算得出結果」，可惜的是兩位答題過程中出現小瑕疵。

S4 先前在後測時忘記如何合併、化簡，突發奇想把「前項括號內係數相減 $(6+10)$ ，再乘上 x ，得 $16x$ ；後項括號內係數相減 $(2-8)$ ，再乘上 x ，得 $-6x$ ；接著把兩項相加得出答案。」此作法與 S4 作答前測例題 15 作法不同；但是 S4 經過研究者於後測例題 13 重新教導後，能依循研究者所教導的解題方式，說出本題的合併、化簡之作法「把 $6x$ 和 $2x$ 括號相加合併， $10-8$ 合併，所以答案是 $8x+2$ 」，顯示 S4「代數式合併與化簡」的解題能力有進步。

表 47 錯誤類型三（例題 15）之解題狀態分析（後測）

答錯考題	錯誤類型狀態	原始解題歷程	解題想法／ 解題困難點
例題 15： 請化簡下列式子： $(3x-6) + (-5x+12) = ?$	S2：數字項計 算錯誤；S3： 抄題錯誤，導 致計算錯誤。 上述皆屬於 「因個人疏忽 所導致的隨機 型錯誤」。	S2： $(3x-6) + (-5x+12)$ $= (3x-5x) + (-6+12)$ $= -2x+18$ S3： $(3x-6) + (-5x+12)$ $= (3x-5x) + (-6+12)$ $= -2x+18$	S2、S3： 先把有 x 項的合 併起來，然後也 把數字項合併， 之後進行運算。
	S4： 未正確將代數 符號、數字分 別合併，而將 括號內係數相 加減後的結果 乘上 x ；再將兩 項相加，導致 代數式合併與 化簡錯誤。	S4： $(3x-6) + (-5x+12)$ $= -3x+7x$ $= 4x$	S4： 忘記怎麼算！前 項括號內的係 數相減 $(3-6)$ ， 再乘上 x ，得 $-3x$ ；後項括號內 的係數相加 $(-5+12)$ ，再乘上 x ，得 $7x$ ；接著 把兩項相加得 出答案。

由表47可發現，S2、S3皆能夠正確地按照步驟「先去除括號，接著把含有代數符號的兩項括號合併一起，常數項括號合併一起，接著進行加減運算計算出答案」，可惜的是兩位答題過程中出現小瑕疵，導致計算結果錯誤，而S3因粗心抄題錯誤導致後續一連串錯誤，S2、S3的錯誤類型可歸類在錯誤類型理論中Engelhardt(1982)、李芳樂(1993)及Maurer(1987)提出的「因個人疏忽所導致的隨機型錯誤」。

S4 先前在後測時忘記如何合併、化簡，所以突發奇想把「前項括號內係數相減 $(3-6)$ ，再乘上 x ，得 $-3x$ ；後項括號內係數相減 $(-5+12)$ ，再乘上 x ，得 $7x$ ；接著把 $-3x+7x$ 得出答案 $4x$ 。」此作法與後測例題 14 相同；但是 S4 經過研究者於後測例題 13 重新教導後，能依循老師所教導的解題方式，說出本題的合併、化簡之作法「把 $3x$ 和 $-5x$ 括號合併一塊兒， -6 與 12 括號合併一塊兒，所以答案 $= -2x+6$ 」，顯示 S4「代數式合併與化簡」的解題正確率有提升。

綜合上述，經由「一元一次方程式－以符號列式與運算」三項錯誤類型補救後，全部學生已能「正確運用運算符號與代數符號記錄成代數式」；然後「代數符號簡記」與「代數式的合併與化簡」經二次補救後，學習速度較為落後的S4比第一次補救後還明顯進步許多。





第五章 結論與建議

本章根據研究結果提出結論與建議，共分為兩節，第一節為結論，第二節為建議，提供其他教師進行此單元教學與未來研究之參考。

第一節 結論

代數單元是國中數學核心課程之一，也是銜接高等數學之根基，我國中學數學教育國一上開始就有代數課程，並以一元一次方程式作為建構代數觀念的起始單元；此外，皮亞傑的認知發展理論中也指出，中學生於形式運思期階段應具備抽象符號假設能力，抽象代數符號的學習有助未來數理領域的學習及發展，上述顯示「一元一次方程式—以符號列式與運算」的基礎養成十分重要；所以研究者認為協助數學低成就學生找出他們在「一元一次方程式—以符號列式與運算」的錯誤類型並做修正，對他們未來學習難度更高的代數單元有相當助益；在此，數學低成就學生於「一元一次方程式—以符號列式與運算」有哪些錯誤類型、針對不同錯誤類型之教學策略、補救成效是本研究所要探討的。

一、錯誤類型一、錯誤類型二、錯誤類型三主要各含四項錯誤類型狀態，經交叉比對後發現錯誤類型狀態有部分共通性

（一）錯誤類型一：未能正確運用運算符號與代數符號記錄成代數式

研究結果發現，學生主要的錯誤類型狀態可歸納成四項：1. 題目要求依題意列出長方形周長的代數式，但學生對長方形周長的計算公式認知錯誤，他們所認為的長方形周長計算公式為「長·寬」，由此可知，「使用長方形面積公式來計算長方形周長」為問題所在，導致代數式列式錯誤；2. 學生未建立「代數式化簡結果可能呈現 $a \pm bx$ 或 $ax \pm b$ 型式之概念」，認為「式子經過加、減、乘、除運算後答案會變成單項式，例如： $5x$ 或 3 等單項式，化簡後答案不該再出現運算符號」，所以當代數式化簡結果呈現 $a \pm bx$ 或 $ax \pm b$ 型式時，學生會想盡辦法把答案化簡成類似 $5x$ 或 3 等單項型式，此種錯誤類型可與本研究文獻探討中學者提出的「認為式子化簡後結果為『單項式』型式」相呼應；3. 類似像「假設媽媽 x 歲，爸爸又比媽媽大三歲」，屬於單位個數添加考題，所以要用加法列式，而「一顆水梨 x 元，西瓜為 4 顆水梨的價錢」屬於兩物件的價格呈倍數關係之考題，所以要用乘法列式，然而學生因未建構「兩物件間價格、數量呈倍數關係」、「物件單位個數添加」

兩者差異，導致無法清楚判斷何者適用加法、乘法列式，衍生列式結果錯誤；4. 以前測例題四為例，「因閱讀能力不足掌握不到題意，造成邏輯推理阻礙」，還有缺乏「玩一次的費用 $\times$ 玩的次數=全部花費」的先備知識，上述兩者原因為學生作答此題型的絆腳石，依據本研究文獻探討，我們可把「先備知識不足」與 Engelhardt (1982) 提出的「缺乏概念」兩者相互連結。

(二) 錯誤類型二：代數符號簡記錯誤

研究結果發現，研究對象有以下五項錯誤類型狀態：1. 在「 $ax \cdot ax$ 」型式的代數式簡記，未將數字項、代數符號都做相乘步驟，導致代數式簡記錯誤，例如： $3x \cdot 3x = 9x$ 之類錯誤；2. 解「『含有負號』的乘法代數符號簡記」題目會把負號與減號混淆，導致乘法代數符號簡記錯誤，例如： $4 \cdot (-2x) = (4-2)x$ 之類似錯誤；3. 遇到「代數符號一分數型乘法簡記」題型，因不知道要使用分數乘法計算來解題，所以問題出在不知道解題技巧，看到題目不知要從何處下手；4. 遇到「代數符號一分數型除法簡記」題型，部分學生因不會分數除法運算，所以不會解題，而部分學生因分數除法運算概念模糊甚至有誤，例如： $x \div (-7) = x \cdot (-\frac{1}{7}) = \frac{1}{x \cdot (-7)}$ ，因不清楚前項「 x 」應擺在答案的分子還是分母，導致「代數符號一分數型除法簡記」錯誤。

(三) 錯誤類型三：代數符號及數字同類項合併、記錄錯誤

研究結果發現，研究對象因未能正確地將代數符號、數字做分別處理，導致代數式的合併與化簡出現錯誤，也就是說，因為沒有將含 x 、 y 項及常數項先括號分類再做加、減運算，卻將不同型式的項次混在一起計算、合併，導致代數式化簡錯誤；然而在「未能正確地將代數符號、數字做分別處理」這部分，經綜合比對分析後歸納出四種錯誤類型狀態：1. 遇到「含括號之代數符號及數字同類項合併」題型時，學生先將前兩項的係數相加後乘以 x ，後兩項的係數相加後乘以 x ，最後再把兩項相減合併成一項答案，例如： $(3x-1) + (6x+9) = 2x + 15x = 17x$ 之類似作法；2. 將所有係數依序加減運算後再加 x ，例如： $2x+6-7+3x = (2+6-7+3) + x$ 之類似作法；3. 將所有係數依序加減運算後再乘以 x ，得到一項答案，例如： $(3x-1) + (6x+9) = (3-1+6+9)x$ 之類似作法；4. 先分別把含有 x 項、係數項做合併，再接續將其結果合併成一項，針對「再接續將其結果合併成一項」錯誤類型狀態，就誠如錯誤類型一所提「學生因未建立代數式化簡結果可能呈現 $a \pm bx$ 或 $ax \pm b$ 型式之概念」，導致做完代數符號及數字同類項合併後，當答案呈現 $a \pm bx$ 或 $ax \pm b$ 型式時，即出現「要繼續化簡到單項式（如『 ax 』、『 b 』型式）的答案才是化簡完成」的念頭。

二、針對不同錯誤類型狀態，教學者所採用的各項教學策略與對應方式

（一）錯誤類型一：未能正確運用運算符號與代數符號記錄成代數式

1. 為修正「認為式子化簡結果為『單項式』型式」錯誤類型狀態，研究者先幫學生釐清「代數式」的定義，透過「用 $+$ 、 $-$ 、 $\times$ 、 $\div$ 符號把 x 、 y 等代數符號和數字連接起來，長這樣的式子稱為代數式」的文字講解，然後一面寫出類似「 $x+3$ 」、「 $x-4$ 」、「 $y\times 7$ 」、「 $z\div 5$ 」等式子，學生能清楚理解代數式定義，學習的當下就把代數式的樣子印記到腦海中；瞭解代數式定義後，接著強調「文字符號也可以像數字一樣可以做運算，經過運算後代數式的化簡結果可能呈現 $a+5$ 、 $x-4$ 型式，所以從這樣的概念我們可以知道，運算、化簡後的答案型式不一定是單項式（ 5 或 $3x$ 等型式）」，以上教學成功修正「認為式子化簡結果為『單項式』型式」錯誤概念。

2. 跟學生提點在答題過程若遇到困難，不妨試著畫數線幫助理解題意與列式；以前測題目例題2為例，學生看到「爸爸比媽媽大3歲」不確定要用乘法還是加法列式，針對此問題，研究者透過畫出類似時間軸的數線講解題意，有效澄清「大3歲」並非倍數概念，同時有效修正列式錯誤之問題。

3. 遇到類似像「假設一顆水梨 x 元，一顆西瓜的價錢比4顆水梨多5元，試問一顆西瓜多少元？請將文字敘述寫成代數式」的題目，學生的盲點在於「不確定題目中的『多5元』是要用『 $+$ 』還是『 $\times$ 』列式」；為了釐清概念，研究者先簡化題目問學生：「我身上有3元，你身上的錢比我多5元，請問你身上有多少元？」此時學生就說：「 $3+5$ 等於8，所以我身上有8元」；之後再舉一個有關倍數的題目並問學生：「我身上有3元，你身上的錢是我的5倍，請問你身上有多少元？」此時學生就說：「 3×5 等於15，所以我身上有15元」，同時告訴學生萬一分不清楚時，可用老師舉的這個例子來反推題目，判斷應該要用加法還是乘法列式。利用簡易的舉例幫助學生釐清盲點，有效修正列式錯誤的問題。

4. 列表格講解為一種有效引導學生思考之方式，不僅邏輯更加清晰，學習效率也提升；以教案(I)範例4題型為例，起初學生看完題目後說不會寫，後來研究者發現因為沒有「玩一次的費用 $\times$ 玩的次數=全部的花費」概念，因此研究者把題目所要問的概念列表格、代入具體數字，用乘法概念講解引導理解表格內容的相互關係，當他們對題目有相當程度的理解後，再回歸到原題目用除法反推，學生能舉一反三正確列出代數式。

(二) 能正確作答代數式簡記題目

1. 作答「 $ax \cdot ax$ 」型式代數式簡記時，學生經常出現未將「數字項、代數符號都做相乘步驟」錯誤類型狀態，起因是學生並未理解為何要將「數字項、代數符號都做相乘」，因此研究者將其來龍去脈重新講解一次，「 $ax \cdot ax = (a \cdot a) \cdot (x \cdot x) = a^2 x^2$ 」，並舉個簡易例子，例如：「 $3x \cdot 3x = 9x^2$ 」，成功修正上述錯誤。

2. 針對「 x 乘以 $(-a)$ 」型式的代數符號簡記題目中，誤把負號理解成減號之錯誤類型狀態，研究者在教材中的範例有特別強調「 $x \cdot (-a)$ 」型式簡記的意義；首先，題目是「 x 乘以 $(-a)$ 」，所以一定是用乘法來簡記，絕非用減法來表示，而且既然是乘法就會和「倍數」有關聯性。舉例來說， $x \cdot (-2)$ 相乘後可簡記為 $-2x$ ，而這個 (-2) 有倍數的意涵，也就是說這個 (-2) 是 x 的倍數，所以我們可把這個 $-2x$ 稱為 x 的 -2 倍。透過倍數概念講解「 $x \cdot (-a)$ 」型式的簡記意義後，學生就能夠理解括號裡面的「 $-$ 」符號是負號而不是減號，成功修正學生在「 x 乘以 $(-a)$ 」型式的代數符號簡記題目中，誤把負號理解成減號的問題。

3. 研究對象看到「分數型乘法代數式簡記」題型一頭霧水，後來發現他們僅是不知道解題技巧，在分數乘法計算沒有太大問題，因此直接提示學生遇到「分數型乘法代數式簡記」題型，「就跟計算分數乘法的做法一樣，只不過題目裡面多了 x 、 y 等代數符號」，順利排除他們不知道要從何解題的困惑。

4. 綜合研究對象的「分數型除法代數式簡記」錯誤類型狀態，研究者統一從分數除法的基礎運算教起，並舉例說明，例如：「 $5 \div 6$ 要用分數表示的話，要先將 5 乘以 6 的倒數即為 $5 \cdot \frac{1}{6}$ ，就可以得知答案為 $\frac{5}{6}$ 」，我們由上面的計算過程可觀察一個計算規則，「除以某一個數，等於乘以該數字的倒數」；學生依循上述計算規則，回歸到含有代數符號的「分數型除法代數式簡記」題目，能夠正確回答其計算過程，順利修正「分數型除法代數式簡記」之錯誤類型狀態。

(三) 能正確將代數符號同類項合併與化簡

1. 綜合研究對象「未能正確將代數符號同類項合併與化簡」之錯誤類型狀態，研究者統一教學，舉實例教導學生「先把含有 x 的項次用紅筆圈起來，把它們視為同一家族的人，接著把只有數字的項次用藍筆圈起來，把它們視為另一家族的人；研究者確認沒問題後，請學生把含有代數符號的項次括號一起，把常數項括號一起，列完算式後進行加減計算」，即為代數符號同類項合併與化簡之步驟，上述教學方式學生「代數符號同類項合併與化簡」解題能力有顯著提升。

2. 若此類型題目含有括號，就是多一個步驟先除去括號，之後繼續依循上述方法進行合併與化簡；研究者用精熟學習之教學模式，讓學生習得正確解題技巧後，搭配大量習題演練，成功提升「代數符號同類項合併與化簡」解題精熟度與正確率。

三、三項錯誤類型補救教學成效良好，成績顯著提升；首次補救後第一項錯誤類型的錯誤已完全修正，其餘仍有部分錯誤

從前測總成績，後測總成績分析三項錯誤類型補救教學對七年級學生的學習成效影響（前、後測滿分為 105 分），五位研究對象前測成績表現低落，最低分為 0 分，表示全部考題都答錯，而成績最高分為 42 分，也透露出至少一半以上試題都答錯之警訊，前測總平均分數為 18.2 分，標準差約為 16.12；經補救後，最高分為滿分，最低分為 77 分，後測總平均分數為 93.8 分，標準差約為 11.71，從數據可觀察到經補救後班上學生的程度差距是縮小的；此外，「學習成效前、後測成績」之相依樣本 t 檢定達顯著差異，顯示出本研究針對「一元一次方程式－三項錯誤類型」補救後學習成效顯著提升；另外，三項錯誤類型中每一項錯誤類型之「前、後測成績相依樣本 t 檢定」皆達顯著差異，補救教學具有良好效果。

以前、後測答題情形分析三項錯誤類型補救教學對七年級學生的學習成效影響，從前測答題情形發現，受試者於錯誤類型三「未能正確地將代數符號、數字做分別處理，導致代數式的合併與化簡出現錯誤」的平均答錯率高達 100%，而錯誤類型一「未能正確運用運算符號與代數符號記錄成代數式」的平均答錯率 85% 為次之，然後錯誤類型二「代數符號簡記錯誤」的平均答錯率為 75%，顯示補救前受試者在錯誤類型三的試題答錯率最高，錯誤類型一的試題答錯率次之，錯誤類型二的試題答錯率最低；接著對照後測答題情形分析，雖然受試者於第三項錯誤類型的平均答錯率已降至 53.33%，比前測結果進步許多，但嚴格來看，此答錯率代表五位學生中有二至三位受試者答錯，表示補救後多數受試者仍存在錯誤概念待修正，而錯誤類型二僅一人答錯，平均答錯率為 20%，代表學生大致能掌握「代數符號簡記」之題型，其錯誤概念已被修正，最後，錯誤類型一全數學生皆完全得分，平均答錯率為 0%，可知全部受試者皆能掌握「運用運算符號與代數符號記錄成代數式」之題型，錯誤類型一之錯誤概念已完全被修正。

四、經二次補救後，學生在「 $ax \cdot ax$ 類型的乘法簡記」與「代數符號及數字同類項合併、記錄」運算概念更加清晰，解題表現更為進步

初次補救第二項錯誤類型後，S4 在後測試題中「 $ax \cdot ax$ 」類型的乘法簡記題目出現錯誤，依然未將數字項、代數符號都做相乘步驟，導致代數式簡記錯誤，然而研究者再次利用「 $ax \cdot ax = (a \cdot a) \cdot (x \cdot x) = a^2 x^2$ 」並實際代入數字解說，接著學生

也能依循上述解題步驟，逐步完成此種類型的乘法簡記問題，最後也作答正確，經二次補強後，S4 對此概念又更加清晰，解題表現上也比補救前與初次補救後更好。第一次補救第三項錯誤類型後，多數學生現在已掌握到「請化簡下列式子： $8x+3+5x-7$ 」此種類型的代數符號及數字同類項合併技巧，已學會「分別把含有 x 項的括號合併再一起，數字項括號合併一起」，進行代數符號及數字同類項合併，一改以往「先把全部的係數加減運算後，再乘以 x 」或是「先把全部的係數加減運算後，再加 x 」的錯誤作法，但唯獨 S4 仍然出現以往的舊錯誤；另外，從後測試卷結果也發現到，經補救後多數學生現在已掌握到「請化簡下列式子： $(6x+10)+(2x-8)$ 」此種類型的代數符號及數字同類項合併技巧，已學會「先去除括號重整，再分別把含有 x 項的括號合併一起，數字項括號合併一起」，進行代數符號及數字同類項合併；一改以往「分別將括號的前、後項係數做加減運算，再其計算結果分別乘以 x 」的錯誤作法，S4 也仍舊出現上述錯誤；但經過一對一二次補救，再次講解重建概念後，發現他對上述兩者概念並非完全陌生，只是不夠熟悉忘記怎麼算，老師講解後又再次勾起他過去所學的內容，S4 依循老師所教的解題步驟，逐步完成後測試卷例題 14、例題 15，最後作答正確，顯示經二次概念補強後，S4 在「代數符號及數字同類項合併、記錄」的題目作答，有更加掌握到解題技巧，答題正確率有提升。

五、抽牌累積點數遊戲為有效激勵學習的方式，成功提升學習動機與課堂配合度，同時免勵學生繼續保持相同的熱忱來學習更多數學知識

為了有效提升學生學習數學的動機和課堂配合度，因此研究者想出一套抽鋪克牌累積點數的遊戲規則，學生在課堂上有發言、情境對話角色飾演、學習單（隨堂練習）答題全對、有按時繳交作業等優良表現就可獲得抽牌機會，於每一節課的下課前會記錄點數，並於最後一次上課統計總點數、頒發獎品；在課堂上發現，學生很專注在課程學習的動力主因是擔心自己錯過抽牌機會，而且他們會和同學較勁點數多寡，擔心自己的點數比同學少，所以很努力學習、願意配合老師的要求，盡可能爭取抽牌機會，成功提升學生學習動機與課堂配合度；研究者勉勵學生要繼續維持相同熱忱與熱度學習、探索更多數學知識，相信在此學科會有大幅進步。

六、學生學會某項概念後很有成就感，激發出自主學習動機，答題躍躍欲試，成功降低學習數學的懼怕感與排斥感

在課堂中部分學生學會某項概念後，興奮地主動向研究者表示：「這沒有很難！可不可以趕快來寫學習單（隨堂練習）了」，研究者感到很欣慰，看到學生學會某項概念後自信心大幅提升，答題躍躍欲試，成功降低學習數學的恐懼感與排斥感。

第二節 建議

基於上述研究發現與討論提出七點建議：

一、建議課堂上多給予學生機會表達個人對題意的認知，此外，因代數式列式需應用到國小數學知識，如平時上課幫學生回顧國小課程內容，有助提升代數式列式之能力及正確率

由於錯誤類型一的題型是依題意列出代數式，牽涉到題意理解部分，如果誤解題意可能會用錯解題策略，甚至是題目看不懂而列不出代數式，所以建議教學者不妨在課堂上多花一點時間讓學生逐題思考、討論題意，給予每位學生機會口頭發表他們對題意的理解是什麼，他們的解題想法是什麼，相信經過長時間訓練可降低看不懂題目和用錯運算策略的機率，提升代數式列式答題正確率；依題意列出代數式需用到國小所學過的數學內容，像是長方形周長計算、乘法倍數等問題，然而學生因類似上述的基礎知識不足導致代數式列式錯誤，因此建議平時補救課程可以幫學生回顧國小數學課程內容，應能夠大幅提高代數式列式答題正確率。

針對代數式簡記錯誤之錯誤類型教學，建議要修正「 $ax \cdot ax$ 」計算結果錯誤的問題，可參照研究者拆解成「 $ax \cdot ax = (a \cdot a) \cdot (x \cdot x) = a^2 x^2$ 」來解釋，並實際代入數字驗證，學生的接受度比較強；此外，要修正學生誤解「 $x \cdot (-a)$ 」的「 $-a$ 」是減 a 的意思，建議可參照研究者「代入數字並用倍數概念」來解釋，例如：「 $x \cdot (-3)$ 」可解釋成「 x 的負3倍」所以「 $x \cdot (-a)$ 」可解釋成「 x 的負 a 倍」，即能有效修正「誤把負號理解成減號的問題」。

針對代數符號同類項合併與化簡之錯誤類型教學，建議可參照研究者的作法，用較有趣的說法來解釋解題技巧，例如：「把同一個代數符號視為一家人，把數字視為一家人，接著分別把每一家人括號一起，列完算式後進行加減計算」，這樣的講解方式學生的吸收能力佳，有效修正第三種錯誤類型。

二、本研究屬精熟學習教學模式，透過概念記憶與反覆練習達到修正錯誤目標，建議教學者應強調概念理解，使學生將所學存入長期記憶知識庫

第一次補救後仍有個體在「代數符號及數字同類項合併技巧」錯誤類型尚未完全修正，個體本身聽講時能夠理解老師教授的概念，但是遇到題目又忘記正確算法，老師講解後又再次勾起他過去所學的內容，接著能逐步依循老師所教的解題方式

正確作答，研究者認為此情況是個體本身用記憶的方式把解題技巧存放在短期記憶中，因此建議教學者應更加強調概念理解，才能使學生將所學的概念有真正的吸收及內化，進而存入長期記憶知識庫。

三、除了用圖示、教具作為題意講解輔助工具外，建議可設計動畫或短劇做題意與解題引導教學，或許能達到更好的學習成效

錯誤類型一的題型是「要將題目的文字敘述寫成數學算式」，所以看懂題目、運用正確解題策略是答題正確首要關鍵，為了解決「掌握不到題意，造成邏輯推理阻礙，進而使用不當的運算解題策略」問題，除了可用畫圖、使用教具講解或列表拆解題意幫助列式之外，建議可以事先把所要教的題目設計成動畫教學，或是把抽象數學問題用短劇方式具體演出來，換個方式做題意與解題引導教學，或許能夠達到更好的學習成效。

四、利用紙筆測驗、口頭評量等方式外，也可運用均一平台作為評量工具檢核學習成效

本研究以紙筆測驗、發表評量、遊戲式評量為主要考核方式，若課堂時間更充裕的話，建議可運用均一平台的習題資源，讓學生進去「一元一次方程式—代數式與其運算」單元進行線上評量。均一平台建置許多題庫，舉例來說，平台裡面「以代數式表示數量關係」的習題即可對應到錯誤類型一的題型「依照題意列出代數式」；而「代數式的簡記」的習題，可檢核學生的錯誤類型二「代數符號簡記錯誤」之錯誤概念是否已完全修正；此外，藉由「一元一次式的四則運算」習題演練，可檢核學生錯誤類型三「代數符號同類項合併記錄錯誤」題型作答的掌握度。均一平台的優點是它有豐富的題庫，而且還能夠及時幫助解惑，教學者扮演從旁協助的角色，對「一元一次方程式—以符號列式與運算」的學習有加乘效果。

五、建議教材朝向素養導向設計，透過情境體驗與任務遊戲，引導學生把知識與生活串聯，瞭解學習「一元一次方程式—以符號列式與運算」意義和精隨

由於 108 課綱上路不久，研究者對國中數學課程內容結合素養導向之教材設計較生疏，所以在教材設計上比較偏向知識理解面，較缺乏素養導向所強調的「情境脈絡化」素材，故建議教材設計如果能夠融入更多生動活潑的情境佈題，學生將會有更豐富的情境體驗；或是課程涵蓋有趣的任務遊戲，引導學生把任務操作串聯

所學知識驗，提供做中學的機會讓學生瞭解到學習「一元一次方程式－以符號列式與運算」的意義和精隨，同時培養學生「數學帶得走的能力」，才能把「一元一次方程式－以符號列式與運算」補救教學精神發揮到極致。

六、前測試題的題型應完全扣緊未來的教學內容，前、後測題型應一致

在研究工具方面，在「一元一次方程式－以符號列式與運算」前測試卷中，有出現一題「請化簡下列式子： $6x+3(x-1)$ 」題目，但是在上課教材中沒有教到「 $3(x-1)$ 」展開的相關題型，而且在後測試卷、學習單、評量卷（共三回）也都沒有出現此種題型，此為出題上的疏失，建議可以把此題刪除或做題目修改。

七、對未來之研究建議

給未來研究者建議如下：一、在研究對象方面，二、在研究內容方面，三、在實驗設計方面，四、在教材設計與教學操作方面，五、在補救教學時間方面。

在研究對象方面，因考量研究者的能力、時間、交通方便性等因素，本研究以高雄市一所國中七年級數學科補救班級為研究範圍與對象，研究對象僅有五名學生，樣本數量稀少，研究結果不宜進階類推至其他年級階層或其他縣市學校之學生，因此未來進行相關研究者，可擴大研究範圍及對象，此更能有效瞭解其他年級或其他縣市學校學生於本單元的錯誤類型狀態及補救成效，擴大有效的推論範圍。

在研究內容方面，國中數學的代數單元範圍廣泛，建議在未來研究上，可選擇其他代數單元作為研究內容，例如：二元一次聯立方程式、一元一次不等式等；此外，在實驗設計方面，受限於研究者教學班級數量與研究對象人數之限制，本研究之教學實驗僅有一班實驗組，沒有對照組，因此採「單組前後測實驗設計」；但「單組前後測實驗設計」在教育的實驗設計中屬於不良的實驗設計，為提升實驗設計的嚴謹程度，建議未來的研究者可增加研究對象人數，新增對照組，採取「實驗組與控制組前測、後測設計」（如表 48），使研究更具完整性，提高研究參考價值。

表 48 實驗組與控制組前測、後測設計

	隨機分發	前測	實驗處理	後測
實驗組	R	O ₁	X ₁	O ₂
控制組	R	O ₃	—	O ₄

在教材設計與教學操作方面，每單元的教材都有設計情境對話，而情境對話是該單元的「概念精華濃縮」，學生透過情境對話演練，加上老師明示提醒重點所在，他們對該單元學習內容即有初步瞭解，此設計具良好的課程前導效果，故建議未來的教學者可參照此作法；最後，在補救教學時間方面，本研究因時程因素（前、後測試卷專家試題審閱、上課週數、時間、場域借用限制等），僅有四節課進行教學實驗，對教學者而言時間緊迫，缺乏時間彈性，時間掌握度、教學流暢性也成為本研究進行教學實驗過程的其中一項挑戰與重要關鍵，因此建議可增加上課堂數，使教學時間更有彈性。



參考文獻

一、中文部分

- 丁思與（2012）。美感取向的數學教學策略研究（未出版之碩士論文）。國立臺北教育大學，臺北市。
- 九章出版社編輯部（1995）。錯解辨析。臺北市：九章出版社。
- 王如敏（2004）。國二學生解一元一次方程式錯誤類型分析研究（未出版之碩士論文）。國立高雄師範大學，高雄市。
- 王為國（2005）。適性教學的回顧與展望。課程與教學，8(1)，97-110。
- 王家通（1998）。論教育機會的均等與公平：以概念分析為中心。教育政策論壇，1(2)，118-132。
- 王淑惠（2008）。淺談數學學障學生的教學。雲嘉特教，7，36-41。
- 王毓玲（2015）。大臺中地區國中一年級學生一元一次方程式應用題的解題歷程分析（未出版之碩士論文）。國立中興大學，臺中市。
- 王瓊珠（2017）。低成就學生之心理特質與輔導。載於陳淑麗、宣崇慧（主編），帶好每一個學生有效的補救教學（30-43頁）。新北市：心理。
- 王麗卿（2002）。提升學習困難的學生之學習能力個案問題的探討及個別化教學之規劃。臺中師院特殊教育論文集，27-48。
- 甘鳳琴（2007）。國小學業成績之馬太效應以高雄縣為例。國立臺東大學，臺東市。
- 田建中（2017）。國民小學補救教學方案執行之現況分析－以高雄市訪視資料為例。教育行政論壇，9(2)，1-20。
- 朱家儀、黃秀霜、方建良（2014）。補救教學方案之問題分析及因應策略。載於2014 提升中小學補救教學之成效理論與實務研討論壇（47-66 頁），臺南市。
- 余民寧、李昭鑒（2018）。補救教學中個別化教學對學生學習成效之影響分析。教育科學研究期刊，54(1)，247-271。
- 李佩臻（2017）。偏鄉國小跨年級國語補救教學實施差異化教學之行動研究（未出版之碩士論文）。國立臺灣師範大學，臺北市。
- 李坤崇（2019）。學習評量（第二版）。新北市：心理。
- 劉世雄（2018）。差異化教學的同質性分組協同學習模式之探究。教師專業研究期刊，16，25-51。
- 李宜玟（2012）。數學低成就學習動機之類型與區別分析：中小學弱勢學生與一般學生之比較。教育科學研究期刊，57(4)，39-71。
- 李芳樂（1993）。數學錯誤成因的探討。香港中文大學初等教育學報，4(1)，77-82。

- 李彥儀（2016）。「補救教學」的「教學補救」。臺灣教育評論月刊，5(11)，51-53。
- 李麗君（2012）。國民中小學教師對弱勢學生低成就之歸因與其補救教學作法關係之研究。αβγ量化研究學刊，4(2)，25-46。
- 李儼（1992）。中國古代數學簡史。臺北市：九章出版社
- 杜正治（1993）。補救教學的實施。載於李吟（主編），學習輔導：學習心理學的應用（425-473 頁）。新北市：心理。
- 林玉雲（2017）。數學補救教學的理想與實施困境。臺灣教育評論月刊，6(5)，96-100。
- 林含諭（2017）。資訊科技應用於適性化學習的教學策略之探討研究。臺灣教育評論月刊，6(6)，142-145。
- 林建平（2010）。低成就學童的心理特徵與原因之探討。國教新知，57(1)，43-51。
- 林素微、王長勝（2016）。數學素養與學生學習投入、驅力及自我信念關聯探討。載於臺灣 PISA 國家研究中心（主編），臺灣 PISA2012 結果報告（307-420 頁）。新北市：心理。
- 林清山、張景媛（1994）。國中生代數應用題教學策略效果之評估。教育心理學報，27，35-62。
- 林進材（2018）。從學科教學知識的觀點論述補救教學政策實施的困境與對策。臺灣教育，709，103-110。
- 林誌彥（2019）。初探國中七年級學生算術與代數思維的差異（未出版之碩士論文）。國立臺灣師範大學，臺北市。
- 林寶山（1998）。教學論：理論與方法。臺北市：五南。
- 邱坤良（2007）。「縮短城鄉文化差距」—人才培育與社區營造。2018 年 9 月 27 日。取自 <https://www.president.gov.tw/Portals/0/Bulletins/paper/pdf/6741-1.pdf>
- 邱婉茹（2001）。以一元一次方程式情境測驗偵測一年級國中學生在一元一次方程式概念發展之可行性（未出版之碩士論文）。國立中山大學，高雄市。
- 侯鳳秋、陳龍川（1999）。適性CAI的個人化文意範例對國小學生解數學文字題之影響。科學教育學刊，7(3)，223-254。
- 施信源、顏美雯（2015）。MOOCs融入數學科翻轉教學模式。教育脈動電子期刊，1，1-13。
- 柯怡君、張靜馨（1995）。以問題為中心的數學教學策略在資優班與普通班實施之比較。科學教育，6，181-207。
- 柯華蕓（2005）。數學學習障礙學生的診斷與確認。國立臺灣師範大學特殊教育學系特殊教育研究學刊，29，113-126。
- 洪有情（2009）。代數與算數。從高觀點看國小的數學與教材知識（一）研討會，145-168。

- 洪健鋒（2016）。利用網路資源進行一元一次方程式的補救教學之研究（未出版之碩士論文）。臺北市立大學：臺北市。
- 洪儷瑜（2017）。補救教學概論。載於陳淑麗、宣崇慧（主編），**帶好每一個學生有效的補救教學**（3-24 頁）。新北市：心理。
- 洪儷瑜（2012）。由補救教學到三層級學習支援。**教育研究月刊**，**221**，13-24。
- 洪儷瑜（2001）。義務教育階段之弱勢學生的補救教育之調查研究。**師大學報：教育類**，**46**(1)，45-65。
- 唐淑華（2013）。帶著希望的羽翼飛翔－談補救教學在十二年國教的定位與方向。**教育人力與專業發展**，**30**(1)，1-12。
- 徐偉民、劉曼麗（2015）。國小攜手計畫數學補救教學課程決定與教學實施之探究。**當代教育研究季刊**，**23**(1)，113-147。
- 秦麗花（1995）。國小數學學障兒童數學解題錯誤類型分析。**特殊教育季刊**，**55**，33-38。
- 張作為（2007）。論著作權於學術倫理之實踐與省思（未出版之碩士論文）。國立清華大學：新竹市。
- 張志明（2010）。多元文化與教育正義：教育行政學的觀點。**教育與多元文化研究期刊**，**3**，333-338。
- 張明恩（2015）。國民小學新手教師與專家教師國語科內容深究教學提問之個案研究（未出版之碩士論文）。國立臺北教育大學，臺北市。
- 張新仁（2001）。實施補救教學之課程與教學設計。**教育學刊**，**17**，85-106。
- 張鳳燕（1991）。教導心理學微觀－從概念學習國小數學教育。**師友月刊**，**284**，24-29。
- 教育部（2018）。教育部國民及學前教育署補助辦理補救教學作業注意事項。2018年10月8日。取自
<https://priori.moe.gov.tw/index.php?mod=about/index/content/precautions>
- 教育部（2017）。國民小學及國民中學補救教學實施方案。2018年10月8日。取自
<https://priori.moe.gov.tw/index.php?mod=about/index/content/plan>
- 教育部（2015）。翻轉偏鄉教育國教署與民間團體簽署補救教學合作契約。2018年10月7日。取自
https://www.edu.tw/news_Content.aspx?n=9E7AC85F1954DDA8&s=653ED16E29C23FF9
- 教育部（2015）。教育部重編國語辭典修訂版。2018年9月28日。取自
<http://dict.revised.moe.edu.tw/cgi-bin/cbdic/gswweb.cgi?o=dcbdic&searchid=Z00000020021>
- 梁仲容、韓弘偉、黃建中（2014）。小數奠基活動模組的補救教學之行動研究。載於 2014 提升中小學補救教學之成效理論與實務研討論壇（141-182 頁），臺南市。

- 梁淑坤(2017)。共舞數學：親子牽手跨越學習障礙。載於詹士宜、楊淑蘭(主編)，**突破數學學習困難理論與實務**(253-271)。新北市：心理。
- 莊惠凱、廖啟順(2017)。運用補救教學改善行銷企劃課程低成就學生之學習狀況。**遠東通識學報**，11(1)，45-58。
- 許建銘(2012)。數學教學策略之實務舉隅。**中等教育**，63(3)，123-136。
- 許素娟(2018)。學習障礙學生的補救教學。**臺灣教育評論月刊**，7(7)，51-54。
- 許添明(2010)。弱勢者學習協助計畫：不應只有補救教學。**教育研究月刊**，199，32-42。
- 郭汾派、林光賢、林福來(1989)。國中生文字符號概念的發展。國科會專題研究計畫報告。(編號：NSC76-0111-S003-08、NSC77-0111-S003-05A)，未出版。
- 郭汾派(1988)。國中生文字符號運算的錯誤類型。**數學科教學輔導論文集**，11-128。
- 郭美滿(2015)。美國特殊教育立法及發展。**特殊教育發展期刊**，59，45-56。
- 郭輝煌(2014)。雲林縣國中生一元一次方程式錯誤類型之研究(未出版之碩士論文)。國立臺中教育大學，臺中市。
- 陳立倫(1999)。兒童解答數學文字題的認知歷程(未出版之碩士論文)。國立中正大學，嘉義縣。
- 陳俊宏(2016)。平等或適足？兩種教育正義觀的比較。**人文及社會科學集刊**，28(3)，377-412。
- 陳彥廷(2015)。國小教師數學教學知識之個案研究。**科學教育學刊**，23(3)，213-239。
- 陳彥廷、柳賢(2009a)。中學生對代數式中文字符號之語意理解研究：不同管道的探討。**科學教育學刊**，17(1)，1-25。
- 陳彥廷、柳賢(2009b)。運用提問方法促進中學生對代數式中文字符號語意理解之研究：提問模型建構。**科學教育學刊**，17(3)，203-231。
- 陳敏銓、徐綺穗(2017)。不同鷹架教學策略對綜合活動學習領域學習成效影響之研究－以繩結編織課程為例。**國立臺南大學教育研究學報**，5(2)，53-70。
- 陳淑麗(2009)。弱勢學生讀寫希望工程－課輔現場的瞭解與改造。臺北：心理。
- 陳淑麗、曾世杰、洪儷瑜(2006)。原住民國語文低成就學童文化與經驗本位補救教學成效之研究。**師大學報：教育類**，51(2)，147-171。
- 曾世杰、陳淑麗(2010)。補救補救教學：提升基礎學力的迷思與證據本位的努力。**教育研究學刊**，199，43-52。
- 黃永和(2013)。低成就學生心理特質與輔導。**新北市教育季刊**，9，19-23。
- 黃玉青(2015)。高雄市國小補救教學實施之個案研究(未出版之碩士論文)。國立高雄師範大學，高雄市。
- 黃俊峰(2014)。論教育機會均等-以能力均等代替學業成就均等。**臺灣教育評論**

- 月刊，3(1)，91-95。
- 黃思華、劉遠楨、顏莞婷（2010）。互動式電子白板融入創新合作學習模式對國小數學科學習成效與動機之影響。**課程與教學季刊**，14，115-140。
- 黃政傑、張嘉育（2010）。讓學生成功學習：適性課程與教學之理念與策略。**課程與教學季刊**，13(3)，1-22。
- 黃淑華、鄭鈴華、王又禾、吳昭容（2014）。一元一次方程式應用問題的補救教學。**臺灣數學教師電子期刊**，35(1)，1-16。
- 楊怡姿（2017）。臺灣與OECD國家國民教育階段補救教學政策之比較。**臺灣教育評論月刊**，6(11)，41-47。
- 楊金城（2005）。國一學生解數學文字題解題歷程之分析研究（未出版之碩士論文）。國立高雄師範大學，高雄市。
- 楊素琴（2012）。五年級學生代數學習補救教學之行動研究（未出版之碩士論文）。國立屏東大學，屏東市。
- 楊淑如（2016）。國中生一元一次方程式補救教學研究（未出版之碩士論文）。國立臺東大學，臺東市。
- 楊智穎、陳怡玲（2013）。國小弱勢學生課後補救教學實施下的學生經驗課程研究。**國立屏東教育大學教育學系100學年度專題研究發表會**。屏東市：國立屏東教育大學。
- 楊朝欽（2007）。國小代數解題與非代數解題之探究（未出版之碩士論文）。國立臺北教育大學，臺北市。
- 楊德清、洪素敏（2008）。分數補救教學之歷程的研究。**教育研究與發展期刊**，4(2)，85-118。
- 葉重新（2017）。**教育研究法**。新北市：心理。
- 詹士宜（2017）數學學習困難學生的補救教學：以替換式數學教學為例。載於詹士宜、楊淑蘭（主編），**突破數學學習困難理論與實務**（195-225頁）。新北市：心理。
- 詹永名、王淑俐（2018）。**補救教學：關懷弱勢者教育**。臺北市：五南。
- 甄曉蘭（2007）。偏遠國中教育機會不均等問題與相關教育政策初探。**教育研究集刊**，53(3)，1-35。
- 趙文崇（2017）。兒童數量概念的發展與異常：從神經生理基礎談起。載於詹士宜、楊淑蘭（主編），**突破數學學習困難理論與實務**（3-15頁）。新北市：心理。
- 蔡明學（2015）。各個補救教學實施模式對我國之啟示。**國家教育研究院教育脈動電子期刊**，2，1-8。
- 蔡金田、蔡政宗（2019）。臺灣原住民重點國民中學補救教學理念與實證分析。臺北市：元華文創。
- 蔡淑裕（2014）。國中生在文字符號的概念與運算上的主要錯誤類型及其補救教

- 學之研究（未出版之碩士論文）。國立臺灣師範大學，臺北市。
- 鄭章華、林佳慧（2012）。數學教育的公平議題：學習成就落差初探。**臺灣數學教師電子期刊**，29，24-36。
- 鄭勝耀（2014）。永齡希望小學數學補救教學計畫之研究。**教育行政研究**，30(1)，37-60。
- 鄭勝耀（2013）。弱勢學生與補救教學之研究。**教育人力與專業發展**，30(1)，13-26。
- 鄭勝耀、林沛吟、許倬甄、王時培（2012）。教育公平議題及特定政策之整合研究子計畫六：我國弱勢教育政策與教育公平之研究：以課後學習輔導為例。國家教育研究院委託之專題研究報告成果（編號：NAER-100-14-C-1-01-06-2-07），臺北市：國家教育研究院。
- 鄭勝耀（2011）。弱勢教育公平指標之研究。**教育政策論壇**，14(4)，63-88。
- 鄭筱燕、潘欣蓉（2014）。實施補救教學方案之困境與因應策略。**臺灣教育評論月刊**，3(6)，37-39。
- 蕭宇欽（2006）。高雄地區七年級學生解一元一次方程式迷思概念之分析研究（未出版之碩士論文）。高雄師範大學，高雄市。
- 蕭芷芸、陳彥廷、陳中川（2017）。國小教師參與數學補救教學培育課程自我知覺數學教學知識改變之研究。**師資培育與教師專業發展期刊**，30(1)，59-86。
- 蕭新雄、徐偉民（2017）。以奠基理念發展國中七年級一元一次方程式補充教材。**屏東大學科學教育**，3，31-54。
- 戴文賓、邱守榕（1999）。國一學生由算術領域轉入代數領域呈現的學習現象與特徵。**科學教育**，10，148-175。
- 聯合國教科文組織（2004）。教科文組織《反對教育歧視公約》對當今世界具有重要意義的十條原因。2018年9月27日。取自
<http://unesdoc.unesco.org/images/0015/001537/153765c.pdf>
- Ranjit, K.、謝雨生、黃國光（2016）。研究方法入門與實務。臺北市：雙葉。
- 謝和秀（2000）。國一學生文字符號概念及代數文字題之解題研究（未出版之碩士論文）。國立高雄師範大學，高雄市。
- 謝孟珊（2000）。以不同符號表徵未知數對國二學生解方程式表現之探討（未出版之碩士論文）。國立臺北師範學院，臺北市。
- 簡淑真（2010）。三種早期閱讀介入方案對社經弱勢幼兒的教學效果研究。**臺東大學教育學報**，21(1)，93-123。
- 魏麗敏（1996）。國小學生學習動機、數學焦慮與數學成就之研究。**國立臺中師範學院國民教育研究所國民教育研究集刊**，4，133-155。
- 魏麗敏（1988）。國小學生數學焦慮、數學態度與數學成就之關係暨學習團體諮商之效果研究（未出版之碩士論文）。國立臺灣師範大學，臺北市。
- 譚寧君（2017）。數學補救教學。載於陳淑麗、宣崇慧（主編），帶好每一個學生

有效的補救教學（155-183 頁）。新北市：心理。

蘇美麗、李永烈（2016）。國中小補救教學實施方案之教學現場省思。臺灣教育評論月刊，5(1)，28-31。



二、外文部分

- Babbitt, B. C. (1990). *Error patterns in problems solving. Paper presented at the International Conference of the Council for Learning Disabilities* (12th, Austin, TX , O October, 1990).
- Blosser, P. E. (1987). Secondary school students' comprehension of science concepts : Some findings from misconception research. ERIC Document Reproduction Service No. ED 286-757.
- Booth, L. R. (1988). *Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford (Ed.), The Ideas of algebra, K-12* (pp.20-32). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Burns, M. (2003). Using games in your math teaching. *Connect Magazine*, 17(2), 1-4.
- Cass, M., Cates, D., & Smith, M. (2003). Effects of manipulative instruction on solving area and perimeter problems by students with learning disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, 18, 112-120.
- Coleman, J. S. (1966). The concept of equality of educational opportunity. *Harvard Education Review*, 38 (1) ,7-22.
- Diaz, E. I. (1998). Perceived factors influencing academic underachievement of talented students of Puerto Rican descent. *Gifted Child Quarterly*, 42(2), 105-122.
- Eggen, P. & D., Kauchak (2012). *Strategies and models for teachers: teaching content and thinking skills*. Boston, MA: Pearson.
- Engelhardt, J. M. (1982). Using computational errors in diagnostic teaching. *The Arithmetic Teacher*, 29 (8) ,16-19.
- Gillborn, D., & Youdell, D. (2000). *Rationing education: Policy, practice, reform and equity*. Buckingham, England: Open University Press.
- Hall, T. (2002). *Differentiated instruction*. Wakefield, MA: National Center on Accessing the General Curriculum (NCAC).
- Herscovics, N., & Kieran, C. (1980). *Constructing meaning for the concept of equation, Mathematics Teacher*, 11, 573-580.
- Jones, F. H. (1987). *Positive classroom discipline*. NY: McGraw Hill Book Company.
- Kathleen, T. T. (1987). *Error reduction strategies for whole number operations in grade four*. (Doctoral Dissertation, University of Brigham Young, 1986)
- Maurer, S. B. (1987). New knowledge about Errors and New Views about Learners : What They Mean to Educators and More Educators Would Like to Know. In A. H.

- Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (pp. 165-187). N. J. : LEA.
- Mayer, R. E. (1985). *Educational psychology: A cognition approach*. N.Y.: Freeman.
- Nash, R. (2004). Equality of educational opportunity: In defense of a traditional : concept. *Educational Philosophy and Theory*, 36, 361-377.
- Olive, J., Izsak, A., & Blanton, M. (2002). Investigating and enhancing the development of algebraic reasoning in the early grades (K-8): The Early Algebra Working Group. In D. S. Mewborn, P. Sztajn, D. Y. White, H. G. Wiegel, R. L. Bryant & K. Nooney (Eds.), *Proceedings of the twenty-fourth annual meeting of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, pp. 119-120). Columbus, OH: ERIC.
- Rawls, J. (1971). *The theory of justice*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Rodriguez, A. J. (2005). Teachers' resistance to ideological and pedagogical change. In A. J. Rodriguez & R. S. Kitchen (Eds.), *Preparing mathematics and science teachers for diverse classrooms* (pp. 1-16). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Schliemann, A. Carraher, D., Brizuela, B., & Earnest, D. (2003). Algebra in elementary school. In N. A. Pateman., B. J. Dougherty & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 2003 joint meeting of PME and PMENA* (pp. 127-134). Honolulu: University of Hawaii.
- Silver, H., & Silver, P. (1991). *An educational war on poverty: American and British policy-making 1960-1980* (pp. 70). Cambridge, UK: Cambridge.
- Skemp, R.R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Vasquez, V.M. (1982). *Algebra word problems: Exploring high school students conception Through their solution strategies*. (Doctoral dissertation, The University of Microfilms).
- Warnock, M. (1975). *The concept of equality in education.*, Oxford Review of Education., 1(1), 3-8.

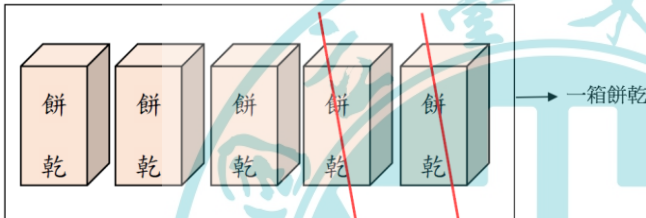


附錄

附錄1 一元一次方程式補救教學教案（I）

主題名稱	代數符號意義之理解及代數式列式		
授課教師	陳卓怡	授課時數	50 分鐘
教學對象	國中七年級學生	學生人數	5 人
教材參考	翰林版國一上教師手冊（依據 107 年公布之十二年國教課綱數學領域編輯而成）、均一教育平台線上題庫、教育部國中數學基本學習內容補救教材－第一冊		
先備知識	1.已有□、（ ）可代表未知數之概念。 2.已具備加、減、乘、除法基礎運算之概念。		
教學目標研究			
學習表現	a-IV-1 理解並應用符號及文字敘述表達概念、運算、推理及證明。		
學習內容	A-7-1 以符號記錄生活中的情境問題。		
領域核心素養	數-J-A1、數-J-A2、數-J-B1、數-J-C2。		
議題融入	【閱讀素養教育】 閱 J3：理解學科知識內的重要詞彙的意涵，並懂得如何運用該詞彙與他人進行溝通。 【品德教育】 品 J1：溝通合作與和諧人際關係。 品 J8：理性溝通與解決問題。		
教學目標	能正確運用運算符號與代數符號將文字敘述記錄成代數式。		
遊戲式評量 獎勵規則	①全對者抽兩張撲克牌；錯一題的人抽一張撲克牌。 ②若抽到鬼牌可再抽兩張。 ③下課後統計點數，點數累計至 12/27，點數最多及次多者可得獎品一份。		

教學流程	分鐘	效果評量
一、引起動機 (一) 生活中的符號的代表意義 ◆ 生活中我們常看到一些符號，像是「⊙」代表禁止，「☺」代表開心。 ◆ 請學生發表在生活中曾看過哪些符號，請舉例。到黑板上畫出符號，並說明其意義為何。	2分	口頭發表
◆【小試身手】 底下是生活中常見的例子，請將符號及其代表的意義連起來。 肯德基 •  快樂 •  晴朗 •  正確 • 	10分	專心聆聽 口頭發表 實作評量
二、發展活動 (一) 以符號代表數 ◆【情境對話】 <u>美華</u> ：在國小階段課本經常利用□、()來表示未知數，但除此之外，我們還可以用哪些東西來表示未知數呢？ <u>浚霆</u> ：在數學上我們也會用甲、乙、丙、x、y等等來表示未知數。 <u>美華</u> ：這些文字符號是不是可以像數字一樣做運算呢？ <u>浚霆</u> ：可以，用「+、-、×、÷」等運算符號，將代表數的符號和數字連接起來的代數式進行運算，其運算結果代表數。	8分	口頭發表 寫板書

教學流程	分鐘	效果評量																												
◆【範例】 ①媽媽今年35歲，經過2年後，媽媽就是$(35 + 2)$歲。 <table><tr><td>35</td><td>2</td></tr><tr><td colspan="2">$35 + 2$</td></tr></table> ☞所以，媽媽今年35歲，經過x年後，媽媽是$(35 + x)$歲。 <table><tr><td>35</td><td>x</td></tr><tr><td colspan="2">$35 + x$</td></tr></table> ②一箱餅乾有5包，吃掉2包後還剩下$(5 - 2)$包。  ☞所以，一箱餅乾有x包，吃掉3包後還剩下$(x - 3)$包。 ③一杯檸檬茶25元，老師買了x杯花了$(25 \times x)$元。  ④玩一次投籃機要x元，哥哥共花80元，所以哥哥玩了$(80 \div x)$次的投籃機。 ★玩一次的費用$\times$玩的次數=全部的花費 <table><tr><th>一次費用</th><th>次數</th><th>全部花費</th><th>次數算法</th></tr><tr><td>10元</td><td>2次</td><td>? 元</td><td>$10 \times 2 = 20$元</td></tr><tr><td>10元</td><td>3次</td><td>? 元</td><td>$10 \times 3 = 30$元</td></tr><tr><td>20元</td><td>4次</td><td>? 元</td><td>$20 \times 4 = 80$元</td></tr><tr><td>20元</td><td>?</td><td>80元</td><td>$20 \times ? = 80$元 $\rightarrow 80 \div 20 = 4$</td></tr></table> ★從$80 \div 20 = 4$得知，題目問「玩幾次」，就是由全部的花費$\div$玩一次的費用=玩的次數	35	2	$35 + 2$		35	x	$35 + x$		一次費用	次數	全部花費	次數算法	10元	2次	? 元	$10 \times 2 = 20$ 元	10元	3次	? 元	$10 \times 3 = 30$ 元	20元	4次	? 元	$20 \times 4 = 80$ 元	20元	?	80元	$20 \times ? = 80$ 元 $\rightarrow 80 \div 20 = 4$	10分	發表評量 寫板書 搭配圖示講解
35	2																													
$35 + 2$																														
35	x																													
$35 + x$																														
一次費用	次數	全部花費	次數算法																											
10元	2次	? 元	$10 \times 2 = 20$ 元																											
10元	3次	? 元	$10 \times 3 = 30$ 元																											
20元	4次	? 元	$20 \times 4 = 80$ 元																											
20元	?	80元	$20 \times ? = 80$ 元 $\rightarrow 80 \div 20 = 4$																											

三、綜合活動

◆【隨堂練習】

①假設錢筒裡面原本有 y 元，再存10元進去，現在錢筒裡面有多少元？請依據題意列出代數式(答案用 y 表示)

解：原本



後來



②哥哥身上原本有 y 元，他買了一顆茶葉蛋10元後，請問哥哥身上還剩下多少錢？請依據題意列出代數式(答案用 y 表示)

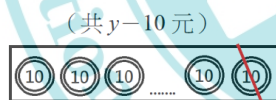
★拿塑膠錢幣給學生做買賣演練。

★買東西身上的錢會變少，所以把身上原本擁有的錢，減去花掉的錢，就是身上剩下的錢。

解：原本



後來



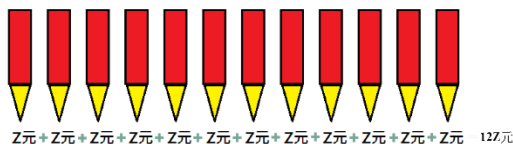
③假設一支紅筆賣 z 元，弟弟買了12支紅筆，試問他總共花了多少錢？請依據題意列出代數式(答案用 y 表示)

解：

T問S：一支紅筆3元，若老師買2支花多少錢？怎麼算的？

S回答： $3 \cdot 2 = 6$ 。(T補充說明： $3 + 3 = 3 \cdot 2 = 6$)

T說：好，回到這題，「一支紅筆賣 z 元，現在買了12支，請問總共花了多少錢？」應該如何列式呢？



S回答：連加12個，等於 $z \cdot 12$ 。

20分

遊戲式評量
發表評量

④汽水工廠的倉庫裡原本有 y 瓶汽水，老闆又進貨50瓶，試問倉庫共有多少瓶汽水？請依據題意列出代數式。(答案用 y 表示)

解：

T說：本跟第一題概念相同，原本有 y 瓶汽水，先把 y 寫上去，「又進貨50瓶」，就是倉庫原本的汽水數量再增加50瓶，所以再 $+50$ ，就寫出「 $y+50$ 」的代數式，「 $y+50$ 」代表倉庫現有的汽水數量。

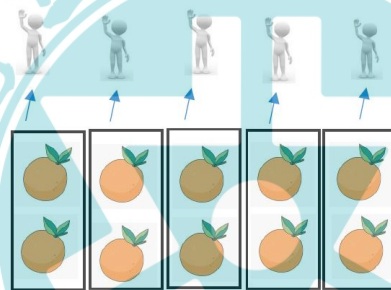
⑤桌上有 y 顆橘子，平分給6個人，則每個人能夠拿到幾顆橘子？請依據題意列出代數式。(答案用 y 表示)

解：

T先拿出10張橘子圖卡，依序平分給5位學生，問S每個人拿到幾張橘子圖卡？

S答：2張。

T圖解並講解原因：



算式： $10 \div 5 = 2$

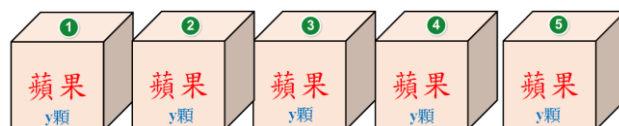
T問：所以現在如果有 y 顆橘子要平分給6個人，應該如何列式呢？

S答： $y \div 6$ 。

⑥爸爸到美式商場買了5箱蘋果，假設一箱蘋果有 y 顆，請問爸爸共買了幾顆蘋果？請依據題意列出代數式(答案用 y 表示)。

解：

T說：本題跟第三題概念相同，如下圖所示



列式： $y + y + y + y + y = y \cdot 5$

遊戲式評量
發表評量

第一堂課結束



附錄2 一元一次方程式補救教學教案（Ⅱ）

主題名稱	代數式的乘法簡記		
授課教師	陳卓怡	授課時數	50 分鐘
教學對象	國中七年級學生	學生人數	5 人
教材參考	翰林版國一上教師手冊(依據 107 年公布之十二年國教課綱數學領域編輯而成)、均一教育平台線上題庫、教育部國中數學基本學習內容補救教材－第一冊		
先備知識	1.已具備加、減、乘、除法基礎運算之概念。 2.已具備乘法交換率（ $axb=bxa$ ）之概念。 3.已具備「負負得正」之概念。 4.已理解代數符號之性質。		
教學目標研究			
學習表現	a-IV-1 理解並應用符號及文字敘述表達概念、運算、推理及證明。		
學習內容	A-7-1 一次式的化簡與同類項。		
領域核心素養	數-J-A1、數-J-A2、數-J-B1、數-J-C2。		
議題融入	【閱讀素養教育】 閱 J3：理解學科知識內的重要詞彙的意涵，並懂得如何運用該詞彙與他人進行溝通。 【品德教育】 品 J1：溝通合作與和諧人際關係。 品 J8：理性溝通與解決問題。		
教學目標	修正「代數符號乘法簡記錯誤」之錯誤概念。		
遊戲式評量獎勵規則	①全對者抽兩張撲克牌；錯一題的人抽一張撲克牌。 ②若抽到鬼牌可再抽兩張。 ③下課後統計點數，點數累計至 12/27，點數最多及次多者可得獎品一份。		

教學流程	分鐘	效果評量
一、引起動機 【情境對話】 美華：老師，前面範例第三題的式子（$25 \times x$）中，那個 x 和 x 也太像了吧！看久了會混淆，怎麼辦？ 浚霆：在一個代數式中，當代數符號與數字相乘時，我們可以把乘號「$\times$」改寫成「$\cdot$」，或是直接省略不寫。例如：$2 \times x = x \times 2$，可記為「$2 \cdot x$」，或簡記為「$2x$」。 美華：老師我有一個疑問，兩數相乘有交換律，所以 $2 \times x = x \times 2$，那麼 $2 \times x$ 也可以簡記為「$x2$」嗎？ 浚霆：不可以喔！我們習慣將數字寫在代數符號的左邊，也就是說 $2 \times x$ 和 $x \times 2$ 都簡記為「$2x$」。 ★「$2x$」稱為「x的2倍」。	10分	寫板書 口頭發表 發表評量
二、發展活動 ◆【範例】 ① $x \cdot (-2)$ ★可記為「$(-2) \cdot x$」，或簡記為「$-2x$」。 ★「$-2x$」稱為「x的-2倍」。 ② $\frac{7}{4} \cdot x$ ★可記為「$x \cdot \frac{7}{4}$」，或簡記為「$\frac{7}{4}x$」。 ★「$\frac{7}{4}x$」稱為x的$\frac{7}{4}$倍。	10分	專心聆聽 舉手發問

三、綜合活動 ◆【隨堂練習】 請化簡下列算式： ① $5 \cdot x$ ★可記為<u>$x \cdot 5$</u>，或簡記為<u>$5x$</u>。 ★$5x$稱為「x的5倍」。 ② $x \cdot (-7)$ ★可記為<u>$(-7) \cdot x$</u>，或簡記為<u>$-7x$</u>。 ★$-7x$稱為「x的-7倍」。 ③ $x \cdot 3$ ★可記為<u>$3 \cdot x$</u>，或簡記為<u>$3x$</u>。 ★$3x$稱為「x的3倍」。 ④ $(-8) \cdot x$ ★可記為<u>$x \cdot (-8)$</u>，或簡記為<u>$-8x$</u>。 ★$-8x$稱為「x的-8倍」。 ★舉前測試題的例子，列出學生當時的計算過程，請學生指出錯誤點，並說明如何正確修正，以加深印象。 ★一對一指導評量卷1錯誤題目。	10分 10分 10分	遊戲式評量 發表評量 試題檢討 試題檢討 第二堂課結束
--	----------------------------------	---



附錄3 一元一次方程式補救教學教案（Ⅲ）

主題名稱	代數式的除法簡記		
授課教師	陳卓怡	授課時數	50 分鐘
教學對象	國中七年級學生	學生人數	5 人
教材參考	翰林版國一上教師手冊(依據 107 年公布之十二年國教課綱數學領域編輯而成)、均一教育平台線上題庫、教育部國中數學基本學習內容補救教材－第一冊		
先備知識	1.已具備加、減、乘、除法基礎運算之概念。 2.已具備基本的分數運算能力。 3.已理解代數符號之性質。		
教學目標			
學習表現	a-IV-1 理解並應用符號及文字敘述表達概念、運算、推理及證明。		
學習內容	A-7-1 一次式的化簡與同類項。		
領域核心素養	數-J-A1、數-J-A2、數-J-B1、數-J-C2		
議題融入	【閱讀素養教育】 閱 J3：理解學科知識內的重要詞彙的意涵，並懂得如何運用該詞彙與他人進行溝通。 【品德教育】 品 J1：溝通合作與和諧人際關係。 品 J8：理性溝通與解決問題。		
教學目標	修正「代數符號除法簡記錯誤」之錯誤概念。		
遊戲式評量獎勵規則	①全對者抽兩張撲克牌；錯一題的人抽一張撲克牌。 ②若抽到鬼牌可再抽兩張。 ③下課後統計點數，點數累計至 12/27，點數最多及次多者可得獎品一份。		

教學流程	分鐘	效果評量
一、引起動機 【情境對話】 美華：老師，既然乘法有簡記，那麼除法也有簡記嗎？ 浚霆：除法和乘法關係密切，所以除法也有簡記。除法簡記的關鍵，在於「除一個數等於乘一個倒數」。 例如：$3 \div 5 = 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$ 美華：原來如此！所以 $x \div 5 = x \times \frac{1}{5} = \frac{x}{5}$。 浚霆：不錯喔！但這邊要提醒你：$x \div 5 = x \times \frac{1}{5}$，$x \times \frac{1}{5}$ 也可以簡記為「$\frac{1}{5}x$」。 美華：瞭解了！	10分	口頭發表 發表評量
二、發展活動 ◆【範例】 ① 假設有 x 個pizza要分給6個人，那麼每個人可以分到_____個pizza。（請用簡記表示） ★使用分數板操作示範。 解：$(x \div 6)$ 簡記 $\Rightarrow x$ 乘以6的倒數 $= x \cdot \frac{1}{6} \Rightarrow \text{簡記為 } \frac{x}{6}。$ ② $x \div (-13)$ 簡記 $\Rightarrow x$ 乘以 (-13) 的倒數 $= x \cdot \left(-\frac{1}{13}\right) \Rightarrow \text{簡記為 } -\frac{x}{13}。$ ③ $x \div \frac{3}{7}$ 簡記 $\Rightarrow x$ 乘以 $\frac{3}{7}$ 的倒數 $= x \cdot \frac{7}{3} \Rightarrow \text{簡記為 } \frac{7}{3}x。$ ★舉前測試題的例子，列出學生當時的計算過程，請學生指出錯誤點，並說明如何正確修正，以加深印象。	25分	教具操作 專心聆聽 舉手發問



附錄4 一元一次方程式補救教學教案（IV）

主題名稱	代數式的合併與化簡		
授課教師	陳卓怡	授課時數	50 分鐘
教學對象	國中七年級學生	學生人數	5 人
教材參考	翰林版國一上教師手冊（依據 107 年公布之十二年國教課綱數學領域編輯而成）、均一教育平台線上題庫、教育部國中數學基本學習內容補救教材－第一冊		
先備知識	1.已具備加、減、乘、除法基礎運算之概念。 2.已具備基本的分數運算能力。 3.已理解代數符號之性質。		
教學目標			
學習表現	a－IV－1 理解並應用符號及文字敘述表達概念、運算、推理及證明。		
學習內容	A－7－1 一次式的化簡及同類項。		
領域核心素養	數－J－A1、數－J－A2、數－J－B1、數－J－C2		
議題融入	【閱讀素養教育】 閱 J3：理解學科知識內的重要詞彙的意涵，並懂得如何運用該詞彙與他人進行溝通。 【品德教育】 品 J1：溝通合作與和諧人際關係。 品 J8：理性溝通與解決問題。		
教學目標	修正「代數符號同類項合併、記錄錯誤」之錯誤概念。		
遊戲式評量 獎勵規則	①全對者抽兩張撲克牌；錯一題的人抽一張撲克牌。 ②若抽到鬼牌可再抽兩張。 ③下課後統計點數，點數累計至 12/27，點數最多及次多者可得獎品一份。		

教學流程	分鐘	效果評量
一、引起動機 美華：老師我有一個疑問，如果是數的運算式子，也可以將乘號省略嗎？ 浚霆：不可以！對於數的乘法6×8也可以寫成$6 \cdot 8$，但不可以將「$\cdot$」省略，否則會變成整數68了。 美華：了解！要在不會產生誤解的情況下才可以省略乘號。 浚霆：當算式中含有加減運算時，「$+$」、「$-$」是不可以省略的。例如：$xx8 + 4$可以簡記為「$8x + 4$」。而且我們為了簡記一些式子，會使用符號或記號。例如：$5 + 5 + 5 + 5$，簡記成5×4，代表5連續加4次。 美華：原來如此！所以$x + x + x + x + x = xx5$，可以簡記成「$5x$」。 浚霆：答對了！很棒喔！	8分	口頭發表 發表評量

二、發展活動

(一) 設 x 和 y 是任意數，則有：

$$ax + bx = (a + b) \cdot x$$

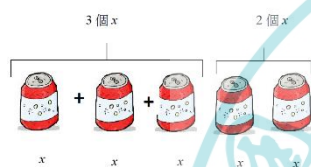
$$ax - bx = (a - b) \cdot x$$

◆ 一個算式中含多個未知數（代數符號）與數字時，我們可以把相同的未知數、數字做分類與合併，並進行運算，完成化簡。

◆【範例】

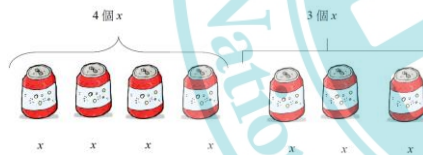
$$\textcircled{1} 3x + 2x = (3 + 2) \cdot x = 5 \cdot x = 5x$$

假設每瓶可樂都是一個 x



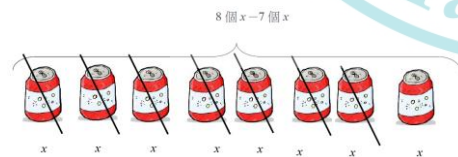
$$\textcircled{2} 4x + 3x = (4 + 3) \cdot x = 7 \cdot x = 7x$$

假設每瓶可樂都是一個 x



$$\textcircled{3} 8x - 7x = (8 - 7) \cdot x = 1 \cdot x = x$$

假設每瓶可樂都是一個 x



12分

寫板書
圖示操作並講解

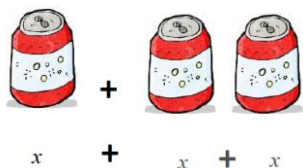
三、綜合活動

◆【隨堂練習】

(一) 請化簡下列算式，並詳列計算過程：

$$\textcircled{1} x+2x=(1+2) \cdot x=3x$$

舉例：每瓶可樂 x 元，哥哥買了一瓶，之後媽媽又買了兩瓶，請問他們總共花多少元？



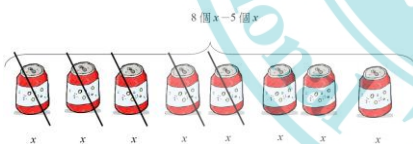
$$\textcircled{2} 3x+6x=(3+6) \cdot x=9x$$

舉例：每瓶可樂 x 元，哥哥買了三瓶，之後媽媽又買了六瓶，請問他們總共花多少元？



$$\textcircled{3} 8x-5x=(8-5) \cdot x=3x$$

假設每瓶可樂都是代表一個 x ，原本桌上有8瓶可樂，弟弟喝了3瓶，請問剩下幾個 x ？



(二) 請化簡下列算式，並詳列計算過程：

$$\textcircled{1} -5x+3+3x-1$$

$$= (-5+3)x + (3-1) = -2x+2$$

$$\textcircled{2} 3x-18+6x+5$$

$$= (3+6)x + (-18+5) = 9x-13$$

$$\textcircled{3} (8x+1) + (3x-7)$$

$$= (8+3)x + (1-7) = 11x-6$$

$$\textcircled{4} (10x-5) + (12x-9)$$

$$= (10+12)x + (-5-9)$$

$$= 22x-14$$

★統計點數、頒發獎品

10分

寫板書
圖示操作並講解

20分

寫板書並講解

8分鐘

第四堂課結束

附錄5「一元一次方程式—以符號列式與運算」前測專家試題審閱

審查委員您好：

學生是東大課碩班研究生陳卓怡，今為執行「一元一次方程式解題錯誤類型補救教學之研究」之需，設計前、後測評量卷各一份，以及學習單1份、評量卷3份。為建立專家效度，敬請撥冗審查各題項之適切性，並勾選「保留」、「修改」、或「刪除」，若有具體修正意見，煩請在「修訂意見欄」中惠賜卓見!感謝您!

敬請 教安。

研究生 陳卓怡 敬上

本份試題共有10題，每題10分，請詳列計算過程，並將答案填入空格中。

錯誤類型	題目
一、未能正確運用運算符號與代數符號記錄成代數式	例題一：☐保留 ☐修改 ☐刪除 一個寬為2公分，長為x公分的長方形周長為_____公分。（請將文字敘述寫成數學算式） 計算過程： ☞本題測驗目的：是否已能正確運用代數符號記錄生活情境中的代數式。 修訂意見欄： 例題二：☐保留 ☐修改 ☐刪除 已知爸爸比媽媽大3歲，假設用x歲表示媽媽的年齡，那麼爸爸的年齡可表示_____歲。（請將文字敘述寫成數學算式） 計算過程：

錯誤類型	題目
	☞ 本題測驗目的：是否已能正確運用代數符號記錄生活情境中的代數式。 修訂意見欄： 例題三： ☐保留 ☐修改 ☐刪除 已知媽媽比女兒大 30 歲，假設用 x 歲表示媽媽的年齡，那麼女兒的年齡可表示_____歲。（請將文字敘述寫成數學算式） 計算過程： ☞ 本題測驗目的：是否已能正確運用代數符號記錄生活情境中的代數式。 修訂意見欄： 例題四： ☐保留 ☐修改 ☐刪除 已知一顆西瓜的價錢比 4 顆水梨多 5 元，假設一顆水梨 x 元，則一顆西瓜_____元。（請將文字敘述寫成數學算式） 計算過程： ☞ 本題測驗目的：是否已能正確運用代數符號記錄生活情境中的代數式。 修訂意見欄：

錯誤類型	題目
二、代數符號簡記錯誤	例題五：☐保留 ☐修改 ☐刪除 下列四個敘述，何者正確？_____ (A) $3x$ 表示 $3+x$。 (B) x^2 表示 $x+x$。 (C) $3x^2$ 表示 $3x \cdot 3x$。 (D) $3x+5$ 表示 $x+x+x+5$。 計算過程： ☞ 本題測驗目的：是否已改變「代數符號簡記錯誤」之錯誤概念。 修訂意見欄： 例題六：☐保留 ☐修改 ☐刪除 請化簡下列式子：$4 \times (-2x) =$_____。 計算過程： ☞ 本題測驗目的：是否已改變「代數符號—乘法簡記錯誤」之錯誤概念。 修訂意見欄： 例題七：☐保留 ☐修改 ☐刪除 請化簡下列式子：$12x \times \frac{3}{4} =$_____。 計算過程： ☞ 本題測驗目的：是否已改變「代數符號—乘法簡記錯誤」之錯誤概念。

錯誤類型	題目
三、未能正確地將代數符號同類項合併並記錄下來	修訂意見欄：
	例題八： ☐ 保留 ☐ 修改 ☐ 刪除 請化簡下列式子： $3x + 4y + 5x + 6y =$ _____。
	計算過程：
	☞ 本題測驗目的：是否已改變「代數符號同類項合併、記錄錯誤」之錯誤類型。
	修訂意見欄：
	例題九： ☐ 保留 ☐ 修改 ☐ 刪除 請化簡下列式子： $2x + 6 - 7 + 3x =$ _____。
	計算過程：
	☞ 本題測驗目的：是否已改變「代數符號同類項合併、記錄錯誤」之錯誤類型。
	修訂意見欄：
	例題十： ☐ 保留 ☐ 修改 ☐ 刪除 請化簡下列式子： $7x + 3 - (-2x) + y =$ _____。
	計算過程：
	☞ 本題測驗目的：是否已改變「代數符號同類項合併、記錄錯誤」之錯誤類型。
	修訂意見欄：

附錄 6「一元一次方程式－以符號列式與運算」後測專家試題審閱

本份試題共有 10 題，每題 10 分，請詳列計算過程，並將答案填入空格中。

錯誤類型	題目
一、未能正確運用運算符號與代數符號記錄成代數式	例題一：☐保留 ☐修改 ☐刪除 開同樂會當天，老師買了 5 箱餅乾，假設每箱餅乾有 x 包，請問總共有_____包餅乾。（請將文字敘述寫成數學算式） 計算過程： ☞本題測驗目的：是否已能正確運用代數符號記錄生活情境中的代數式。 修訂意見欄：
	例題二：☐保留 ☐修改 ☐刪除 假設一台電視遊樂器 x 元，<u>小銘</u>和<u>小陶</u>共買一台，則每人應分攤_____元。（請將文字敘述寫成數學算式） 計算過程： ☞本題測驗目的：是否已能正確運用代數符號記錄生活情境中的代數式。 修訂意見欄：
	例題三：☐保留 ☐修改 ☐刪除 一顆籃球的價格是一顆排球的 2 倍多 30 元，假設排球每顆 x 元，則每顆籃球_____元。（請將文字敘述寫成數學算式）

錯誤類型	題目
	計算過程： ☞ 本題測驗目的：是否已能正確運用代數符號記錄生活情境中的代數式。 修訂意見欄： 例題四：☐保留 ☐修改 ☐刪除 奇奇玩投籃球機總共花了 x 元，假設玩一次 30 元，請問奇奇總共玩了_____次。（請將文字敘述寫成數學算式） 計算過程： ☞ 本題測驗目的：是否已能正確運用代數符號記錄生活情境中的代數式。 修訂意見欄：
二、代數符號簡記錯誤	例題五：☐保留 ☐修改 ☐刪除 下列四個敘述，何者正確？_____ (A) x^2 表示 $x+x$。 (B) $8x$ 表示 $8+x$。 (C) $8x^2$ 表示 $8x \cdot 8x$。 (D) $5x+6$ 表示 $x+x+x+x+x+6$。 計算過程：

錯誤類型	題目
三、未能正確地將代數符號同類項合併並記錄下來	☞本題測驗目的：是否已改變「代數符號簡記錯誤」之錯誤概念。 修訂意見欄： 例題六：☐保留 ☐修改 ☐刪除 請化簡下列式子：$5 \times (-3x) = \underline{\hspace{2cm}}$。 計算過程：
	☞本題測驗目的：是否已改變「代數符號－乘法簡記錯誤」之錯誤概念。 修訂意見欄： 例題七：☐保留 ☐修改 ☐刪除 請化簡下列式子：$18x \times \frac{5}{6} = \underline{\hspace{2cm}}$。 計算過程：
	☞本題測驗目的：是否已改變「代數符號－乘法簡記錯誤」之錯誤概念。 修訂意見欄：
	例題八：☐保留 ☐修改 ☐刪除 請化簡下列式子：$9x + 8 - 4y + 6x + 13y = \underline{\hspace{2cm}}$。 計算過程：

錯誤類型	題目
	☞ 本題測驗目的：是否已改變「代數符號同類項合併、記錄錯誤」之錯誤類型。 修訂意見欄： 例題九： ☐保留 ☐修改 ☐刪除 請化簡下列式子：$(6x+10) + (2x-8) =$ _____。 計算過程： ☞ 本題測驗目的：是否已改變「代數符號同類項合併、記錄錯誤」之錯誤類型。 修訂意見欄： 例題十： ☐保留 ☐修改 ☐刪除 請化簡下列式子：$(3x-6) + (-5x+12) =$ _____。 計算過程： ☞ 本題測驗目的：是否已改變「代數符號同類項合併、記錄錯誤」之錯誤類型。 修訂意見欄：

附錄7「一元一次方程式—以符號列式與運算」學習單專家試題審閱

★ 代數符號意義之理解及代數式列式

① ☐保留 ☐修改 ☐刪除

假設錢筒裡面原本有 y 元，再存10元進去，現在錢筒裡面有多元？

請依據題意列出代數式（答案用 y 表示）。

答：_____。

修訂意見欄：

② ☐保留 ☐修改 ☐刪除

哥哥身上原本有 y 元，他買了一顆茶葉蛋10元後，請問哥哥的身上還剩下多少錢？

請依據題意列出代數式（答案用 y 表示）。

答：_____。

修訂意見欄：

③ ☐保留 ☐修改 ☐刪除

假設紅筆一支賣 z 元，弟弟到書局買了12支紅筆，試問他總共花了多少錢？

請依據題意列出代數式（答案用 z 表示）。

答：_____。

修訂意見欄：

④ ☐保留 ☐修改 ☐刪除

汽水工廠的倉庫裡原本有 y 瓶汽水，老闆又進貨50瓶，試問倉庫共有多少瓶汽水？

請依據題意列出代數式（答案用 y 表示）。

答：_____。

修訂意見欄：

⑤ ☐保留 ☐修改 ☐刪除

桌上有 y 顆橘子，平分給 6 個人，則每個人能夠拿到幾顆橘子？
請依據題意列出代數式（答案用 y 表示）。

答：_____。

修訂意見欄：

★ 代數式的簡記

請化簡下列算式：

① ☐保留 ☐修改 ☐刪除

$5 \times x$ $\hookrightarrow$ 可記為_____，或簡記為_____。

修訂意見欄：

② ☐保留 ☐修改 ☐刪除

$x \times (-7)$ $\hookrightarrow$ 可記為_____，或簡記為_____。

修訂意見欄：

③ ☐保留 ☐修改 ☐刪除

$3 \times x$ $\hookrightarrow$ 可記為_____，或簡記為_____。

修訂意見欄：

④ ☐保留 ☐修改 ☐刪除

$(-8) \times x$ $\hookrightarrow$ 可記為_____，或簡記為_____。

修訂意見欄：

⑤ ☐保留 ☐修改 ☐刪除

$x \div 13 =$ _____ (以分數型式表示)。

修訂意見欄：

⑥ ☐保留 ☐修改 ☐刪除

$x \div (-8) =$ _____ (以分數型式表示)。

修訂意見欄：

★ 代數式的合併與化簡

(一) 請化簡下列算式，並詳列計算過程：

① ☐保留 ☐修改 ☐刪除

$x + 2x =$ _____ $=$ _____

修訂意見欄：

② ☐保留 ☐修改 ☐刪除

$3x + 6x =$ _____ $=$ _____

修訂意見欄：

③ ☐保留 ☐修改 ☐刪除

$8x - 5x =$ _____ $=$ _____

修訂意見欄：

④ ☐保留 ☐修改 ☐刪除

$$15x - 7x = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

修訂意見欄：

⑤ ☐保留 ☐修改 ☐刪除

$$4x - 8x = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

修訂意見欄：

(二) 請化簡下列算式，並詳列計算過程：

① ☐保留 ☐修改 ☐刪除

$$-5x + 3 + 3x - 1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

修訂意見欄：

② ☐保留 ☐修改 ☐刪除

$$(3x - 6) + (7x + 8) = \underline{\hspace{2cm}}$$

修訂意見欄：

③ ☐保留 ☐修改 ☐刪除

$$(8x + 1) + (3x - 7) = \underline{\hspace{2cm}}$$

修訂意見欄：

④ ☐保留 ☐修改 ☐刪除

$$3(x-6) = \underline{\hspace{2cm}}$$

修訂意見欄：

⑤ ☐保留 ☐修改 ☐刪除

$$-(x-5) = \underline{\hspace{2cm}}$$

修訂意見欄：





附錄8「一元一次方程式－以符號列式與運算」評量卷1專家試題審閱

主題名稱：一元一次方程式－以符號列式 姓名：_____ 日期：

★請將下列各文字敘述寫成數學算式

① ☐保留 ☐修改 ☐刪除

邊長為 y 公分，則正方形的周長為_____公分。

修訂意見欄：

② ☐保留 ☐修改 ☐刪除

老師有 x 公升的綠茶，平分給30位學生，則每個人可分到_____公升。

修訂意見欄：

③ ☐保留 ☐修改 ☐刪除

邊長為 x 公分的正方體體積為_____立方公分。

修訂意見欄：

④ ☐保留 ☐修改 ☐刪除

底為 x 公分，高為 y 公分，則三角形面積為_____平方公分。

修訂意見欄：

⑤ ☐保留 ☐修改 ☐刪除

上底為3公分，下底為5公分，高為 y 公分，則梯形面積為_____平方公分。

修訂意見欄：

⑥ ☐保留 ☐修改 ☐刪除

小孩的體重為 x 公斤，若大人的體重是小孩的2倍多5公斤，則大人的體重為_____公斤。

修訂意見欄：

⑦ ☐保留 ☐修改 ☐刪除

小丸子一家人到電影院看電影，共買了4張全票、2張學生票。假設每張全票為50元，學生票為 x 元，請問共需付_____元。

修訂意見欄：

⑧ ☐保留 ☐修改 ☐刪除

水果店一顆蘋果賣 x 元，一顆水蜜桃賣 y 元。小呱買了5顆蘋果、3顆桃子，則小呱共需付_____元。

修訂意見欄：

⑨ ☐保留 ☐修改 ☐刪除

草嶺古道全長8公里，冠鈞以每小時3公里之速度從起點出發，走了 x 小時後，離終點還有_____公里。

修訂意見欄：

⑩ ☐保留 ☐修改 ☐刪除

小呱在超級籃球聯賽的總冠軍戰，共投進4顆三分球， x 顆兩分球，請問小呱總計投進_____顆球，得_____分。

修訂意見欄：

附錄9「一元一次方程式—以符號列式與運算」評量卷2專家試題審閱

主題名稱：一元一次方程式—代數式的簡記 姓名：_____ 日期：_____

(一) 代數式的乘法簡記

① ☐保留 ☐修改 ☐刪除

$2 \times x$ 可記為_____，或簡記為_____。

修訂意見欄：

② ☐保留 ☐修改 ☐刪除

$x \times 12$ 可記為_____，或簡記為_____。

修訂意見欄：

③ ☐保留 ☐修改 ☐刪除

$2 \times (-4x)$ 可記為_____，或簡記為_____。

修訂意見欄：

④ ☐保留 ☐修改 ☐刪除

$(-6) \times x$ 可記為_____，或簡記為_____。

修訂意見欄：

⑤ ☐保留 ☐修改 ☐刪除

$0.3 \times t$ 可記為_____，或簡記為_____。

修訂意見欄：

⑥ ☐保留 ☐修改 ☐刪除

$50 - t \times 7$ 可記為_____，或簡記為_____。

修訂意見欄：

⑦ ☐保留 ☐修改 ☐刪除

$85 - 8 \times x$ 可記為_____，或簡記為_____。

修訂意見欄：

⑧ ☐保留 ☐修改 ☐刪除

$\frac{1}{2} \times a \times b$ 可記為_____，或簡記為_____。

修訂意見欄：

⑨ ☐保留 ☐修改 ☐刪除

$x \times \frac{4}{5}$ 可記為_____，或簡記為_____。

修訂意見欄：

⑩ ☐保留 ☐修改 ☐刪除

$9x \times \left(-\frac{2}{3}\right)$ 可記為_____，或簡記為_____。

修訂意見欄：

附錄10「一元一次方程式－以符號列式與運算」評量卷3專家試題審閱

主題名稱：一元一次方程式－代數式的合併與化簡 姓名： 日期：

★請化簡下列算式，並詳列計算過程：

① $4x + 9 + 10x =$ _____  ☐保留 ☐修改 ☐刪除

修訂意見欄：

② $6x + 5 + 12x + 7 =$ _____  ☐保留 ☐修改 ☐刪除

修訂意見欄：

③ $8 + 5y + 9 + 3y + z =$ _____  ☐保留 ☐修改 ☐刪除

修訂意見欄：

④ $-5x + 6 + 7x - 8 =$ _____  ☐保留 ☐修改 ☐刪除

修訂意見欄：

⑤ $15x - 15 - 13x + 20 =$ _____  ☐保留 ☐修改 ☐刪除

修訂意見欄：

⑥ $(4x + 6) + (-7x - 1) =$ _____  ☐保留 ☐修改 ☐刪除

修訂意見欄：

⑦ $(6x - 5) + (3 - 7x) =$ _____  ☐保留 ☐修改 ☐刪除

修訂意見欄：

⑧ $-(-d+3) =$ _____  ☐保留 ☐修改 ☐刪除

修訂意見欄：

⑨ $-(2d+3) =$ _____  ☐保留 ☐修改 ☐刪除

修訂意見欄：

⑩ $-(-5d+4) =$ _____  ☐保留 ☐修改 ☐刪除

修訂意見欄：



附錄11 「一元一次方程式－以符號列式與運算」前測正式試卷

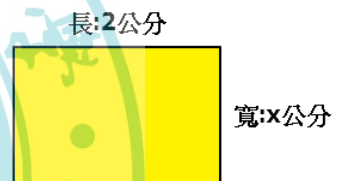
說明：請根據你所學過有關「一元一次方程式－以符號列式與運算」的概念回答下列問題。本試卷主要目的為瞭解同學們在「一元一次方程式－以符號列式與運算」單元的錯誤類型，請詳細閱讀每一道題目，並將你的想法或計算過程寫在「計算過程欄」中，寫得越詳細越好。本試卷將作為教師在教學上參考的依據，並為學生補救教學內容之參考，作答內容絕對保密不公開，敬請放心作答，感謝你的配合！

本試題共 15 題，每題 7 分，滿分 105 分，請於下面方框中詳列計算過程，並將答案填入空格中。

例題 1：

如下圖所示，一個長為 2 公分，寬為 x 公分的長方形周長為_____公分。
(請將文字敘述寫成數學算式)

計算過程：



例題 2：

已知爸爸比媽媽大 3 歲，假設用 x 歲表示媽媽的年齡，那麼爸爸的年齡可表示_____歲。(請將文字敘述寫成數學算式)

計算過程：

例題 3：

奇奇玩投籃機總共花了 x 元，假設玩一次 30 元，請問奇奇總共玩了_____次。
(請將文字敘述寫成數學算式)

計算過程：

例題 4：

已知一顆西瓜的價錢比 4 顆水梨多 5 元，假設一顆水梨 x 元，則一顆西瓜_____元。（請將文字敘述寫成數學算式）

計算過程：

例題 5：下列四個敘述，何者正確？_____

(A) $3x$ 表示 $3+x$ 。 (B) x^2 表示 $x+x$ 。

(C) $3x^2$ 表示 $3x \cdot 3x$ 。 (D) $3x+5$ 表示 $x+x+x+5$ 。

計算過程：

例題 6：請化簡下列式子： $4 \cdot (-2x) =$ _____。

計算過程：

例題 7：請化簡下列式子： $(-1) \cdot 4x =$ _____。

計算過程：

例題 8：請化簡下列式子： $(-2) \cdot 3x =$ _____。

計算過程：

例題 9：請化簡下列式子： $12x \cdot \frac{3}{4} =$ _____。

計算過程：

例題 10：請化簡下列式子： $\frac{5}{6} \cdot 3x =$ _____。

計算過程：

例題 11：請化簡下列式子： $x \div 15 =$ _____（以分數型式表示）。

計算過程：

例題 12：請化簡下列式子： $x \div (-7) =$ _____（以分數型式表示）。

計算過程：

例題 13：請化簡下列式子： $2x + 6 - 7 + 3x =$ _____。

計算過程：

例題 14：請化簡下列式子： $6x + 3(x - 1) =$ _____。

計算過程：

例題 15：請化簡下列式子： $(3x - 1) + (6x + 9) =$ _____。

計算過程：



附錄12 「一元一次方程式－以符號列式與運算」後測正式試卷

說明：請根據你所學過有關「一元一次方程式－以符號列式與運算」的概念回答下列問題。本試卷主要目的為瞭解同學們在「一元一次方程式－以符號列式與運算」單元的錯誤類型，請詳細閱讀每一道題目，並將你的想法或計算過程寫在「計算過程欄」中，寫得越詳細越好。本試卷將作為教師在教學上參考的依據，並為學生補救教學內容之參考，作答內容絕對保密不公開，敬請放心作答，感謝你的配合！

本試題共15題，每題7分，滿分105分，請於下面方框中詳列計算過程，並將答案填入空格中。

例題 1：

開同樂會當天，老師買了5箱餅乾，假設每箱餅乾有 x 包，請問總共有_____包餅乾。（請將文字敘述寫成數學算式）

計算過程：

例題 2：

假設小銘、小陶、安安、恩華四個人一起去吃晚餐，共花了 x 元，則每人應分攤_____元。（請將文字敘述寫成數學算式）

計算過程：

例題 3：

一顆籃球的价格是一顆排球的2倍多30元，假設排球每顆 x 元，則每顆籃球_____元。（請將文字敘述寫成數學算式）

計算過程：

例題 4：

已知媽媽比女兒大30歲，假設用 x 歲表示媽媽的年齡，那麼女兒的年齡可表示_____歲。（請將文字敘述寫成數學算式）

計算過程：

例題 5：下列四個敘述，何者正確？_____

(A) x^2 表示 $x+x$ 。 (B) $8x$ 表示 $8+x$ 。

(C) $8x^2$ 表示 $8x \cdot 8x$ 。 (D) $5x+6$ 表示 $x+x+x+x+x+6$ 。

例題 6：請化簡下列式子： $5 \cdot (-3x) =$ _____。

計算過程：

例題7：請化簡下列式子： $(-2) \cdot 7x =$ _____。

計算過程：

例題8：請化簡下列式子： $(-5) \cdot 6x =$ _____。

計算過程：

例題9：請化簡下列式子： $18x \cdot \frac{5}{6} =$ _____。

計算過程：

例題10：請化簡下列式子： $\frac{3}{7} \cdot 14x =$ _____。

計算過程：

例題11：請化簡下列式子： $x \div 9 =$ _____（以分數型式表示）。

計算過程：

例題 12：請化簡下列式子： $x \div (-4) =$ _____（以分數型式表示）。

計算過程：

例題 13：請化簡下列式子： $8x + 3 + 5x - 7 =$ _____。

計算過程：

例題 14：請化簡下列式子： $(6x + 10) + (2x - 8) =$ _____。

計算過程：

例題 15：請化簡下列式子： $(3x - 6) + (-5x + 12) =$ _____。

計算過程：



附錄13 「一元一次方程式—以符號列式與運算」學習單(正式版)

★ 代數符號意義之理解及代數式列式

① 假設錢筒裡面原本有 y 元，再存10元進去，現在錢筒裡面有多元？

請依據題意列出代數式（答案用 y 表示）。

答：_____。

② 哥哥身上原本有 y 元，他買了一顆茶葉蛋10元後，請問哥哥的身上還剩下多少錢？

請依據題意列出代數式（答案用 y 表示）。

答：_____。

③ 假設紅筆一支賣 z 元，弟弟到書局買了12支紅筆，試問他總共花了多少錢？

請依據題意列出代數式（答案用 z 表示）。

答：_____。

④ 汽水工廠的倉庫裡原本有 y 瓶汽水，老闆又進貨50瓶，試問倉庫共有多少瓶汽水？

請依據題意列出代數式（答案用 y 表示）。

答：_____。

⑤ 桌上有 y 顆橘子，平分給6個人，則每個人能夠拿到幾顆橘子？

請依據題意列出代數式（答案用 y 表示）。

答：_____。

⑥ 爸爸到美式商場買了5箱蘋果，假設一箱蘋果有 y 顆，請問爸爸共買了幾顆蘋果？

請依據題意列出代數式（答案用 y 表示）。

答：_____。

★ 代數式的簡記

請化簡下列算式：

① $5 \cdot x$ 可記為_____，或簡記為_____。

② $x \cdot (-7)$ 可記為_____，或簡記為_____。

③ $x \cdot 3$ 可記為_____，或簡記為_____。

④ $(-8) \cdot x$ 可記為_____，或簡記為_____。

⑤ $x \div 13 =$ _____（以分數型式表示）。

⑥ $x \div (-8) =$ _____（以分數型式表示）。

★ 代數式的合併與化簡

(一) 請化簡下列算式，並詳列計算過程：

① $x + 2x = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

② $3x + 6x = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

③ $8x - 5x = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

④ $15y - 7y = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

⑤ $4z - 8z = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(二) 請化簡下列算式，並於下方方框中詳列計算過程：

① $-5x + 3 + 3x - 1 = \underline{\hspace{2cm}}$

計算過程：

② $3x - 18 + 6x + 5 = \underline{\hspace{2cm}}$

計算過程：

③ $(8+1) + (3x-7) = \underline{\hspace{2cm}}$

計算過程：

④ $(10x-5) + (12x-9) = \underline{\hspace{2cm}}$

計算過程：

附錄 14 「一元一次方程式—以符號列式與運算」評量卷 1(正式版)

主題名稱：一元一次方程式—以符號列式 姓名：_____ 日期：_____

★請將下列各文字敘述寫成數學算式，並於下面方框中詳列計算過程：

①邊長為 y 公分，則正方形的周長為_____公分。

計算過程：

②老師有 x 公升的綠茶，平分給30位學生，則每個人可分到_____公升。

計算過程：

③邊長為 x 公分的正方體體積為_____立方公分。

計算過程：

④三角形的底邊為 y 公分，高比底邊多 3 公分，則高為_____公分。

計算過程：

⑤上底為3公分，下底為5公分，高為 y 公分，則梯形面積為_____平方公分。

計算過程：

⑥小孩的體重為 x 公斤，若大人的體重是小孩的2倍多5公斤，則大人的體重為_____公斤。

計算過程：

⑦小丸子一家人到電影院看電影，共買了4張全票、2張學生票。假設每張全票為50元，學生票為 x 元，請問共需付_____元。

計算過程：

⑧水果店一顆蘋果賣 x 元，一顆水蜜桃賣 y 元。小呱買了5顆蘋果、3顆桃子，則小呱共需付_____元。

計算過程：

⑨草嶺古道全長8公里，冠鈞以每小時3公里之速度從起點出發，走了 x 小時後，離終點還有_____公里。

計算過程：

⑩小呱在超級籃球聯賽的總冠軍戰，共投進4顆三分球， x 顆兩分球，請問小呱總計投進_____顆球，得_____分。

計算過程：

附錄15 「一元一次方程式—以符號列式與運算」評量卷2(正式版)

主題名稱：一元一次方程式—代數式的簡記 姓名：_____ 日期：_____

(一) 代數式的乘法簡記

- ① $2 \cdot x$ 可記為_____，或簡記為_____。
- ② $x \cdot 12$ 可記為_____，或簡記為_____。
- ③ $2 \cdot (-4x)$ 可記為_____，或簡記為_____。
- ④ $(-6) \cdot x$ 可記為_____，或簡記為_____。
- ⑤ $(-3) \cdot t$ 可記為_____，或簡記為_____。
- ⑥ $50 - t \cdot 7$ 可記為_____，或簡記為_____。
- ⑦ $85 - 8 \cdot x$ 可記為_____，或簡記為_____。
- ⑧ $\frac{1}{2} \cdot a$ 可記為_____，或簡記為_____。
- ⑨ $x \cdot \frac{4}{5}$ 可記為_____，或簡記為_____。
- ⑩ $9x \cdot (-\frac{2}{3})$ 可記為_____，或簡記為_____。

(二) 代數式的除法簡記（以分數型式表示）

- ① $x \div 3 =$ _____。
- ② $x \div 15 =$ _____。
- ③ $x \div (-2) =$ _____。
- ④ $x \div (-8) =$ _____。
- ⑤ $x \div (-11) =$ _____。



附錄 16 「一元一次方程式－以符號列式與運算」評量卷 3(正式版)

主題名稱：一元一次方程式－代數式的合併與化簡 姓名： 日期：

★ 請化簡下列算式，並於下方方框中詳列計算過程：

① $4x + 10x =$ _____

計算過程：

② $6x + 5 + 12x + 7 =$ _____

計算過程：

③ $8 + 5y + 9 + 3y =$ _____

計算過程：

④ $-5x + 6 + 7x - 8 =$ _____

計算過程：

⑤ $15x - 15 - 13x + 20 =$ _____

計算過程：

⑥ $(6x+5) + (3+7x) =$ _____

計算過程：

⑦ $(4x+6) + (-7x-1) =$ _____

計算過程：

⑧ $(8x-3) + (-12x+4) =$ _____

計算過程：

⑨ $(-3d+8) + (6d-20) =$ _____

計算過程：

⑩ $(-5d+3) + (10d-2) =$ _____

計算過程：

附錄17 訪談知情同意書

○○的家長您好：

我是 108—1 國一數學補救教學教師陳卓怡，正在進行「一元一次方程式解題錯誤類型補救教學」研究。主要目的是藉由補救教學加強貴子弟在一元一次方程式單元尚未精熟的課程內容，並探究補救教學後的成效。敬請同意 貴子弟參與本研究之各項活動，活動地點在本校的 4F 學習中心，將利用每週五第八節課的時間進行，預計進行四節課。活動所進行一切的測驗內容僅供研究之用，訪談內容絕不對外公開，敬請安心讓 貴子弟參與本研究之各項活動，感謝您的合作。研究中如您有任何問題，歡迎您隨時提出寶貴建議，如同意讓 貴子弟全程參與本研究之各項活動，請您在下方簽名，謝謝。

研究者 陳卓怡 敬上

學生簽名：

家長簽名：

中 華 民 國

年

月

日



附錄18 訪談大綱

訪 談 內 容			
訪談者／記錄者：陳卓怡		受訪者：	
訪談日期：			
前測題目／後測題目	原始解題想法／ 困難點	哪個環節因教學 後而改善，使得 學會解題	其 他



附錄 19 訪談紀錄

訪 談 內 容			
訪談者／記錄者：陳卓怡		受訪者：S1	訪談日期：108.1.10(五)
前測題目	後測題目	原始解題想法／困難點	哪個環節因教學後而改善，使得學會解題
例題2： 已知爸爸比媽媽大3歲，假設用 x 媽媽的年齡，那麼爸爸的年齡可表示_____歲。（請將文字敘述寫成數學算式）	後測筆試全對，所以未做後測試卷訪談	式子運算後，最後答案會變成一項，加、減之類的符號不會繼續保留，所以我就繼續合併，但我不知道「 $x+3$ 」還能怎麼繼續化簡成一項，所以我就去掉加號，然後把 x 和3合併再一起。	老師講解完代數式的定義後，我就清楚知道不能再繼續合併下去。
例題6： 請化簡下列式子： $4 \cdot (-2x) = ?$		認為 $(-2x)$ 代表是「減 $2x$ 」的意思。	現在知道「 $-$ 」是負號，不是減號，有倍數關係，所以這題是 $(4 \cdot -2)x = -8x$
例題9： 請化簡下列式子： $12x \cdot \frac{3}{4} = ?$		看到題目一頭霧水，不知道題目含有分數的要如何化簡，所以又把題目照抄一遍。	算法跟整數的一樣，差別在於數字相乘後需約分再化簡，也就是 $(12 \cdot \frac{3}{4})x = 9x$ 。
例題11： 請化簡下列式子： $x \div 15 = ?$		原本算式： $x \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{x \cdot 15}$ 我知道分數除法的算法，但不知道算出來後， x 應擺在分子還是分母。	老師說可以把 x 當成 $\frac{x}{1}$ ，分子、分母要擺放什麼東西就很清楚。
例題13： 請化簡下列式子： $2x + 6 - 7 + 3x = ?$		我把 $+6$ 看成 -6 ，看錯了...；我原本覺得先把有 x 項的係數加起來，得到 $5x$ ，再來算 $-6 - 7 = -13$ ，最後 $(5 - 13)x = -8x$ 。	老師教得很清楚啊....，有 x 項的括號括一起，數字括一起，然後計算完就得出答案。
例題15： 請化簡下列式子： $(3x - 1) + (6x + 9) = ?$		分別把 $(3x - 1)$ 和 $(6x + 9)$ 的係數做運算，各得出 $2x$ 、 $15x$ 後，相加得到答案。	先把括號拆開，然後做法跟沒括號的一樣，有 x 項的括號括一起，數字的括一起，然後計算完就得出答案。

訪 談 內 容		
訪談者／記錄者：陳卓怡	受訪者：S4	訪談日期：108.1.10(五)
前測題目	原始解題想法／困難點	哪個環節因教學後而改善，使得學會解題
例題2： 已知爸爸比媽媽大3歲，假設用x 媽媽的年齡，那麼爸爸的年齡可 表示_____歲。（請將文字敘述 寫成數學算式）	看到「爸爸比媽媽大3歲」，不 確定是要用乘法還加法列式。	老師在範例那邊，教關於年齡題 目的時候，有教我們畫數線，這個 技巧讓我很清楚的瞭解題意、列 代數式。
例題3：奇奇玩投籃機總共花了x 元，假設玩一次30元，請問奇奇 總共玩了_____次。（請將文 字敘述寫成數學算式）	看不懂題目，疑惑要用乘法還 除法，猜題目是要用乘的（因 為相乘的計算較簡單）！所以 把30和x兩者相乘。	在範例那邊有一題類似的，老師 畫出表格講解變得很有條理，現 在覺得這種題型不難。
後測題目	原始解題想法／困難點	第二次補救過程及結果
例題13： 請化簡下列式子： $8x + 3 + 5x - 7 = ?$	$8x + 3 + 5x - 7$ $= (8 + 3 + 5 - 7) x$ $= 10x$ S4原本認為：先把全部的係數 加減運算後，再乘以x。	在訪談過程中，T再次教導與重建 S4正確概念，「先請他說出含有代 數符號是哪兩項，常數項是哪兩 項；確認沒問題後，再請他把含有 代數符號的兩項括號一起分成一 堆，常數項括號一起分成一堆，也 就是 $(8x + 5x) + (3 + 7)$ ；確認 沒問題後，T問S4：『 $(8x + 5x)$ 等於多少？』S4回答：『 $13x$ 』， T再問S4：『 $(3 + 7)$ 等於多少？』 S4回答：『10』，最後T問S4：『那 兩項相加合併答案會是什麼 呢？』S4回答：『答案是 $13x + 10$ 嗎？』T回應S4：『沒錯！代數式 的合併與化簡的方法就是這樣』， S4也表示：「老師重新教他一遍， 勾起他之前所學過的內容」顯然 S4對於「代數式的合併與化簡方 法」並非完全陌生，只是尚未進入 到長期記憶，需要再多做類似練 習達到精熟學習階段。

後測題目	原始解題想法／困難點	第二次補救過程及結果
例題14： 請化簡下列式子： $(6x+10) + (2x-8) = ?$	$(6x+10) + (2x-8)$ $= 16x - 6x = 10x$ S4表示：忘記怎麼算！突發奇想把前項括號內係數相減（6+10），再乘上x，得16x；後項括號內係數相減（2-8），再乘上x，得-6x；接著把兩項相加得出答案。	再次請S4重新作答例題14、例題15，以確認是否修正錯誤概念。S4不須老師提示即能正確合併、化簡代數式，確定代數式的合併與化簡之錯誤概念已被修正。
例題15： 請化簡下列式子： $(3x-6) + (-5x+12) = ?$	$(3x-6) + (-5x+12)$ $= -3x + 7x$ $= 4x$ S4表示：忘記怎麼算！前項括號內的係數相減（3-6），再乘上x，得-3x；後項括號內的係數相加（-5+12），再乘上x，得7x；接著把兩項相加得出答案。	



附錄20 學生答題情況紀錄表

試卷名稱：「一元一次方程式－以符號列式與運算」學習單

作答日期	學生	答錯試題	錯誤類型	原始解題歷程	原始解題想法／困難點／錯誤理由
108.12.06	S1	無	—	—	—
	S2				
	S3				
	S4				
	S5				
108.12.13	S1	無	—	—	—
	S2				
	S3				
	S4				
	S5				
108.12.20	S1	無	—	—	—
	S2				
	S3				
	S4				
	S5				
108.12.27	S1	無	—	—	—
	S2				
	S3	(一) 請化簡下列算式，並詳列計算過程： ① $x + 2x$ $= ? = ?$	隨機型錯誤	「 $(1+2)$ 」 $= 3x$	S3 說：忘記寫上乘以 x 。
		(一) 請化簡下列算式，並詳列計算過程： ② $3x + 6x$ $= ? = ?$		「 $(3+6)$ 」 $= 9x$	
	S4	無	—	—	—
	S5				

試卷名稱：「一元一次方程式－以符號列式與運算」評量卷 1（108.12.06 作業）

學生	答錯考題	錯誤類型	原始解題歷程	原始解題想法／困難點／錯誤理由
S1	⑨草嶺古道全長 8 公里，冠鈞以每小時 3 公里之速度從起點出發，走了 x 小時後，離終點還有？公里。	缺乏速率公式先備知識，導致不會計算、化簡。	空白	S1、S2 皆表示：忘記速率公式是什麼，所以算不出來。
S2				
S3	無	—	—	—
S4				
S5	③邊長為 x 公分的正方體體積為 _____ 立方公分。	隨機型錯誤	$x+x+x=x^3$	S5 表示：把 $\times$ 號寫成 $+$ 號。

試卷名稱：「一元一次方程式－以符號列式與運算」評量卷 2（代數式的乘法簡記）
（108.12.13 作業）

學生	答錯考題	錯誤類型	原始解題歷程	原始解題想法／困難點／錯誤理由
S1	無	—	—	—
S2				
S3				
S4	③ $2 \cdot (-4x)$ 可記為？或簡記為？	隨機型錯誤	S4 答案： $2 \cdot (-4x)$ 可記為「 (-4) $\cdot 2$ 」或簡記為 $-8x$ 。	S4 表示：喔……粗心！「 $(-4) \cdot 2$ 」的 (-4) 沒寫到 x 。
S5				S5 也表示：粗心造成同樣錯誤。

試卷名稱：「一元一次方程式－以符號列式與運算」評量卷 2（代數式的除法簡記）
（108.12.20 作業）

學生	答錯考題	錯誤類型	原始解題歷程	原始解題想法／困難點 ／錯誤理由
S1	無	—	—	—
S2				
S3				
S4				
S5				

試卷名稱：「一元一次方程式－以符號列式與運算」評量卷 3（108.12.27 作業）

學生	答錯考題	錯誤類型	原始解題歷程	原始解題想法／困難點 ／錯誤理由
S1	請化簡下列算式，並於下面方框中詳列計算過程： ④ $-5x+6+7x-8=?$	計算錯誤，屬隨機型錯誤。	$-5x+6+7x-8$ $=(-5x+7x)+(6-8)=-2x-2$	S1 表示：我「 $-5x+7x$ 」計算錯誤，多一個負號，應該是 $2x$ 才對。
S2			$-5x+6+7x-8$ $=(-5x+7x)+(6-8)=2x+2$	S2 表示：算太快（ $6-8$ ）計算錯誤啦……。
S3	無	—	—	—
S4				
S5				



附錄 21 教學日誌

上課日期：108 年 12 月 6 日（五）		教學者／記錄者：陳卓怡老師					
教學時間：16：10～17：00；節數：一節		抽牌 點數 統計	S1	S2	S3	S4	S5
教學進度：代數符號意義之理解及代數式列式			24	7	5	13	10
課堂記錄	• 上課打鐘前 10 分鐘，先發上課教材給學生，簡略說明教材內容，並提醒學生每次上課都要帶教材；說明抽撲克牌規則及獎勵制度。 • 引起動機：請學生到黑板畫符號，有畫的可以抽撲克牌一張，大家都踴躍舉手發言。 S1：畫愛心，代表「愛或喜歡」。（抽牌：♠3） S2：畫😞，代表「沮喪」。（抽牌：♦2） S3：畫★，老師上課要我們打星號，代表是考試重點的意思。（抽牌：♠A） S4：畫x，代表「錯誤」的意思。（抽牌：♦5） S5：畫「！」，代表「驚訝」的意思。（抽牌：♦10） • 情境對話：請S1（飾演浚霆）、S3（飾演美華），配合度佳，兩人各抽一張牌。（S1抽牌：♠4；S3抽牌：♥2）。 • 範例4：問學生看完題目後有什麼解題想法，學生說不會寫。發現因為沒有「玩一次的費用×玩的次數＝全部的花費」概念，所以T先把這個概念列在黑板上，起初列表格與套入數字、用乘法概念講解引導思考，學生理解後才有辦法反推除法。 • 學習單（隨堂練習）：S1 全對（抽牌：♥8、♣9）；S2 錯一題（抽牌：♠5）；S3 錯一題（抽牌：♠2）；S4 錯一題（抽牌：♠8）；S5 錯兩題。 • 下課前發評量卷 1 當 H.W，提醒學生下次上課檢查，若未帶或未完成者扣牌點數 20 點，點數不夠扣者以倒扣計算。						
教學省思	• 發展活動的對話進行的速度快，大約 5 分鐘左右就結束了。 • 範例講解：搭配圖示、師生一問一答方式，學生吸收力佳，成功建立學生的自信心，降低學習數學的恐懼。 • 以範例 4 為例，列表格講解為一種有效引導 S 思考的方式，S 的邏輯清楚，能融會貫通；學習單第 1 回◎全班都答對。 • 教學整體節奏流暢，學生表現良好。 • 學習單（隨堂練習）：S2、S3、S4、S5 在③直接心算寫 $12z$，而未依題意列出代數式「$12 \cdot z$」；S5 在⑥列出代數式後亂合併。						

上課日期：108 年 12 月 13 日（五）		教學者／記錄者：陳卓怡 老師					
教學時間：16：10～17：00；節數：一節		抽牌 點數 統計	S1	S2	S3	S4	S5
教學進度：代數式的乘法簡記			33	23	21	16	17
課堂記錄	- 上課打鐘前 10 分鐘，檢查作業評量卷 1，收回批改。 全班都有寫作業，每人各抽一張撲克牌。 (S1：♠10；S2：♠K；S3：♣10；S4：♦9；S5：♥Q) - 情境對話：請S2（飾演<u>浚霆</u>）、S4（飾演<u>美華</u>），配合度佳，兩人各抽一張牌。（S2抽牌：♦8；S4抽牌：♥7） - 講解範例時，多數學生已能回應T的引導問題，而且很有自信的說：「這沒有很難！可不可以趕快來寫學習單(隨堂練習)了…」，有躍躍欲試的表現。 - 學習單（隨堂練習）S完成速度快，未全對的學生幾乎都是粗心錯誤。（S1：♣11、♣12；S2：♣2；S3：♠1、♦10；S4：0張；S5：♠4、♦A） - 花10分鐘左右，舉前測試題例子，列出學生當時的計算過程，請學生指出錯誤點，並說明如何正確修正，以加深印象。 - 下課前發評量卷 2 當 H.W（寫乘法簡記部分），提醒學生下次上課檢查，若未帶或未完成者扣牌點數 20 點，點數不夠扣者以倒扣計算。 - 課堂剩餘時間：一對一指導評量卷 1 錯誤題目。						
教學省思	- 部分學生聽完情境對話講解後依然一知半解，但是 T 接續講解兩個範例後，原本不是很理解的學生，也清楚瞭解乘法簡記的意涵與簡記方式，都說有聽懂。由此可知，實例講解對理解助益很大。 - 學生整體的正確回應率高，代表有確實理解，且重建正確概念。 - 聽到學生說：「這沒有很難！可不可以趕快來寫學習單（隨堂練習）了…」，我感到很欣慰，可看出主動學習方面是有進步的。 - 發現學生很期待抽撲克牌，學生之間會互相較勁點數多寡，所以上課很認真聽講、回答問題，這是一種良性的激勵學習。 - 一對一指導能深入瞭解學生的解題錯誤原因或困難點。						

上課日期：108 年 12 月 20 日（五）		教學者／記錄者：陳卓怡 老師					
教學時間：16：10～17：00；節數：一節		抽牌	S1	S2	S3	S4	S5
教學進度：代數式的除法簡記		點數統計	27	28	27	29	39
課堂記錄	- 上課打鐘前 10 分鐘，檢查作業評量卷 2，收回批改。 全班都有寫作業，每人各抽一張撲克牌。 (S1：♦Q；S2：♣4；S3：♣10；S4：♠J；S5：♠10) - 情境對話：請S1（飾演<u>浚霆</u>）、S5（飾演<u>美華</u>），配合度佳，兩人各抽一張牌。（S1 抽牌：♣8；S5 抽牌：♣7） - T 講解完範例後，順便舉前測試卷的例子，把他們寫的錯誤答案舉例出來，指出錯誤之處，包含：分數除法計算方式、計算後簡記錯誤（修正分子分母的擺放位置的錯誤），讓學生知道過去的錯誤點在哪裡，不再犯相同錯誤。 - 學習單（隨堂練習）S 完成速度快，全班皆全對，每人各抽二張撲克牌。（S1：♦2、♦5；S2：♦J、♠K；S3：♦9、♦8；S4：♥7、♠J；S5：♥K、♥9） - 下課前發評量卷 2 當 H.W（寫除法簡記部分），提醒學生下次上課檢查，若未帶或未完成者扣牌點數 20 點，點數不夠扣者以倒扣計算。						
教學省思	- 情境對話已明確聚焦今日學習重點，學生能短時間進入狀況。 - 學生建立正確觀念後，接續舉例前測試卷題目，列出當時的錯誤算式，T 明確指出錯誤概念，並請學生重新作答一次，相信這樣的做法可以加深印象，降低相同錯誤類型的產生。 - 一對一指導能深入瞭解學生的解題錯誤原因或困難點。						

上課日期：108 年 12 月 27 日（五）		教學者／記錄者：陳卓怡 老師																	
教學時間：16：10～17：00；節數：一節		抽牌 點數 統計	S1	S2	S3	S4	S5												
教學進度：代數式的合併與化簡			45	33	16	27	33												
課堂記錄	- 上課打鐘前 10 分鐘，檢查作業評量卷 2，收回批改。 全班都有寫作業，每人各抽一張撲克牌。 (S1：♣Q；S2：♣2；S3：♠A；S4：♦10；S5：♥2) - 情境對話：請S2（飾演<u>浚霆</u>）、S3（飾演<u>美華</u>），配合度佳，兩人各抽一張牌。（S2 抽牌：♦Q；S3 抽牌：♣4） - 寫綜合活動第二大題時，T 特別舉例、修正多數 S 有「式子化簡、 合併後結果為單項式型式」的錯誤概念；提醒注意正、負符號。 - 學習單（隨堂練習）：S 已正確掌握合併、化簡技巧；答題手感佳，正確率高；抽牌點數（S1：♣10、♠K；S2：♦9、♥3；S3：♦8；S4：♥7、♥5；S5：♠J、♠K）。 - 評量卷全班都全對，表現良好值得鼓勵，每人各抽一張撲克牌。 (S1：♥10；S2：♠7；S3：♠3；S4：♦5；S5：♣7) - 統計總點數、頒發獎品 <table><tr><th>學生</th><th>總點數</th></tr><tr><td>S1</td><td>129</td></tr><tr><td>S2</td><td>91</td></tr><tr><td>S3</td><td>69</td></tr><tr><td>S4</td><td>85</td></tr><tr><td>S5</td><td>99</td></tr></table>							學生	總點數	S1	129	S2	91	S3	69	S4	85	S5	99
	學生	總點數																	
S1	129																		
S2	91																		
S3	69																		
S4	85																		
S5	99																		
	下課前發評量卷 3 當 H.W；提醒下次上課 1/3（五）要進行二次測驗，請同學們務必回家複習。																		
教學省思	- 教完後隨即進入隨堂演練，T 可觀察到 S 答題手感是否良好。 - 從隨堂練習的情況發現，學生已掌握到代數式合併、化簡規則；「化簡結果再化為單項式」的錯誤比例顯著降低。 - 部分 S 容易粗心，需時常叮嚀。 - 觀察到學生蠻在意抽牌累積點數這件事，對他們而言，這是其中一項重要的學習動力來源。																		